

SONS, NÚMEROS E GEOMETRIA

Manoel Lima Cruz Teixeira¹

RESUMO: A pesquisa bibliográfica descreve as primeiras relações entre matemática e música, neste artigo. A experiência que Pitágoras fez com o monocórdio usa a linguagem dos números para criar a linguagem musical. O momento social vivido pela sociedade Grega refletiu no trabalho do filósofo e matemático. Depois de mais de mil anos, físicos e músicos deram novos rumos ao que Pitágoras construiu. As figuras de Thales de Mileto e Euclides foram fundamentais nessa mudança de paradigma. Surge a acústica e a música como arte autônoma.

PALAVRAS-CHAVE: Música; Matemática; História da Matemática; Filosofia da Matemática

ABSTRACT: Bibliographical research describes the first relations between mathematics and music in this article. The experience that Pitágoras made with the monochord uses numbers' language, to create musical language. The social moment lived by Greek society was reflected in the philosopher and mathematician work's. After more than a thousand years later, physicists and musicians gave new meaning in what Pitágoras had constructed. The philosophers Thales de Mileto and Euclides were central in this paradigm change. Then it appears the acoustics, and music as an independent art.

KEY-WORDS: Music, Mathematics, Mathematics' History, Mathematics' Philosophy

Introdução

Ninguém sabe como e quando a música nasceu. A idade pré-histórica é tomada como marco da descoberta dos sons. Os sons e os ritmos se encontram na natureza, nos timbres das ondas, da tempestade e das vozes dos animais e humanas. A música tinha sentido religioso, associada à dança assumia caráter de ritual. Os pré-históricos agradeciam aos deuses dançando

¹ Professor Assistente da Faculdade de Educação – UFRJ. Doutorando em Educação Matemática da PUC – SP. E-mail: manodez9@hotmail.com

e usavam as mãos e os pés. Depois rimavam as danças com pancadas na madeira, a percussão nascia com a descoberta do corpo, expresso em palmas, uivos, pulos, batidas e berros. Esse início da música é o surgimento da trajetória musical do mundo ocidental.

Outros continentes têm outras histórias da música para serem contadas. Da música, na época pré-histórica, sabemos pouco, a comunicação entre as civilizações não acontecia, hoje mais de cinco mil anos depois, apesar dos avanços tecnológicos, continua-se engatinhado nesse aspecto.

A democracia Grega

Antes do ano zero, lá pelos seiscentos anos antes de Cristo, o povo Grego vivia transformações profundas na sua sociedade e a música era uma delas. A democracia e a filosofia marcavam o avanço da civilização nos direitos humanos, na musicalidade e nos grandes pensamentos de filósofos, o que desencadeou uma série de situações que ferviam em mudanças para todos. Nessa nova ordem grega, o individualismo, as seitas e os privilégios estavam proibidos.

Pitágoras tinha uma vida intensa nessa época, filósofo, matemático, músico teve participação decisiva nos acontecimentos que movimentava a sociedade grega. Nasceu na ilha de Samus, atual Grécia, em 572 a.C. Mudou-se para Metaponto, atual Itália, em 497 a.C., por questões políticas.

Segundo Singh (1997), Pitágoras e os discípulos conseguiram escapar dos atos revolucionários desencadeados pelo povo grego e foram para a Itália. O imperador italiano da cidade de Crota gostava dos esportes radicais. Tinha uma queda pelas artes e a filosofia. Recebeu Pitágoras e seus seguidores e financiou a comunidade pitagórica.

Pitágoras viajou muito pelo Oriente, Egito, Babilônia, Creta, isso lhe proporcionou bagagem cultural valiosa.

A comunidade pitagórica se manteve por algum tempo, até que, em 460 a. C, outro ataque dizimou quase todos, sobraram alguns que conseguiram preservar seus ensinamentos até 300 a.C. Essa é outra versão para o paradeiro de Pitágoras em vida. O pitagorismo parecia que não

queria se acabar, sobrevivendo por mais nove séculos, até a Idade das Trevas, por volta de 600 d.C. Para outros, o pitagorismo resiste até nossos dias, apesar de não ter tanta importância e não ser reconhecido como um dos maiores filósofos da humanidade.

O número pitagórico

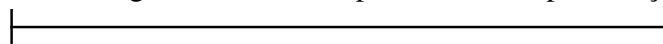
Filósofo, músico e matemático Pitágoras descobriu as leis matemáticas dos intervalos musicais valendo-se do monocórdio, instrumento de uma corda só que ele inventou. O monocórdio consiste em uma caixa de ressonância sobre a qual se estende uma corda tensionada e apoiada em suas extremidades por dois cavaletes.

Esta figura nos permite visualizar como funciona o monocórdio. Ao puxar uma corda ela vibra livremente gerando uma nota básica. Apertando com um dedo o meio da corda, a nota produzida é uma oitava mais alta e em harmonia com a nota original. Outras notas harmônicas podem ser produzidas apertando-se o dedo a $3/4$, $2/4$ etc.

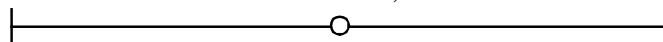
Usar a matemática para captar a ordem que está nos sons emitidos estabelece a invariância entre números e leis matemáticas. Esse duplo conhecimento nos leva a considerar o feito de Pitágoras como a essência da concretude matemática. Segundo Santos (2000, p.63), o filósofo terminou “Descobrimo a relação fundamental da altura dos sons, com a longitude das cordas que vibram, submeteu o fenômeno do som a invariabilidade de uma lei numérica.”

Hoje em dia muitas pessoas conhecem as notas musicais: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, cada uma delas é representada por uma letra. Dó por C, ré por D, mi por E, fá por F, sol por G, lá por A e o si por B. Os intervalos musicais podem ser de vários tamanhos. A noção de intervalo musical está intimamente associada à noção de razão. Qual a razão entre os números 2 e 3? Prontamente respondemos: $2/3$. Qual a razão entre os segmentos 4 cm e 5 cm? Isso é fácil: $4\text{ cm}/5\text{ cm} = 4/5$. O intervalo na teoria musical criada por Pitágoras tem importância crucial. Ao estender a corda na madeira surge a relação da matemática com a música. A corda pode ser entendida assim,

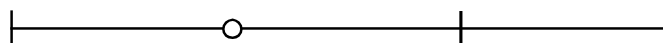
como fosse um segmento de reta, só para efeito de representação.



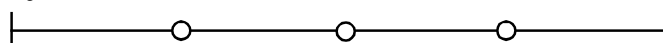
Nos tempos de hoje as cordas dos violões são de náilon ou de ferro. Tocando-se a corda solta, a vibração produzida é chamada de nota básica. Também conhecida como tônica, sua razão é 1:1.



Pressionando a corda ao meio, a nota produzida é uma oitava mais alta. Por exemplo, se apertamos a corda no dó, obtemos uma oitava, indo-se do ré até chegar ao dó novamente completando-se o ciclo de oito notas musicais. O som é o mesmo, só com uma pequena diferença chamada de uma oitava mais alta, em harmonia com a nota original a oitava tem como razão 1:2.



Pressionando a corda no ponto vermelho reproduzimos o som da quinta cuja razão é 2:3.



A quarta tem fração 3:4, emite-se esse som pressionando a corda no ponto vermelho.

Estava criada assim, a origem das escalas musicais. Pitágoras, interpretou a música definindo os intervalos musicais em termos matemáticos. Ao fazer essas experiências os intervalos mencionados passaram a ser denominados de consonâncias pitagóricas.

Atualmente a música está baseada neste sistema. Criou-se o primeiro sistema denotação musical. Existem várias escalas musicais. A mais conhecida é a de Dó Maior ou C. Sua representação é dada por: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó (ou C, D, E, F, G, A, B, C).

O monocórdio deu origem ao violão, mas, em vez de uma corda, tem seis. De cima para baixo as cordas têm os nomes:

mi-6ª corda	sol-3ª corda
lá- 5ª corda	si- 2ª corda
ré- 4ª corda	mi- 1ª corda

O mi da 6ª corda é grave e o da 1ª é agudo. A técnica de tocar violão e monocórdio é a mesma, sempre se tocando as cordas soltas ou

pressionadas nos trastes. Os trastes funcionam como se fossem as marcas no braço do violão para os meio, terços, quartos etc.

Alguns filósofos pitagóricos, como: Platão, Sócrates, Aristóteles, Proclo, Parmênides, não podiam declarar esta ligação, o pitagorismo estava proibido na Grécia democrática. A ligação com o sobrenatural e as divindades, adoração por entidades imaginadas, às religiões e seitas estão na existência humana e com maior propriedade no filósofo de Samus.

A idéia de transformar o som numa linguagem possibilitou a criação de um novo ramo da matemática, no tempo de Pitágoras. A Música, Aritmética, Astronomia e Geometria formavam o Quadrivium. As quatro disciplinas do currículo matemático daquela época.

Esse “Círculo Quadrivium” mostra a representação da Astronomia, Música, Aritmética e Geometria. A compreensão dessas quatro artes/ciências permitia a orientação em qualquer campo não conhecido do conhecimento, pensavam os estudiosos da antiguidade.

Os símbolos dos planetas, na circunferência, foram arrumados da seguinte maneira. Na tradicional ordem da Astronomia, na parte superior: Uranos, Netuno e Plutão, posicionados nas três vértices do triângulo. A série harmônica e o meio tom para o acorde médio C (dó maior). No meio da circunferência, à direita, as séries proporcionais de Platão, na parte inferior da circunferência. Círculos arranjados na forma dos quartos círculos tangentes pitagóricos, no meio à esquerda. Ramos da matemática que tempos depois deixou de existir, tornaram-se autônomos ficando só a aritmética e a geometria.

Para Pitágoras o número tem conotação transcendental. Afirmava, o número é tudo, O número rege o mundo. Onde estaria a força desse tal de número? Pitágoras usou a noção de divindade. O 1 tinha dois significados. O 1 como Deus Supremo, criador de todas as coisas. E o outro 1 no sentido concreto de ser uma coisa, um homem, um animal etc. O 1 nesse sentido gera todos os outros números; o 2 é $1+1$. O 3 = $1+1+1$, e assim por diante.

O número do outro lado

Os Romanos, ao invadirem a Grécia, impuseram suas teorias. Não estavam interessados nos ensinamentos que poderiam obter do povo mais intelectualizado da época. Questões filosóficas e estudos científicos nas diversas áreas do conhecimento foram substituídos pelas pesquisas em balística, estratégias de guerra e tudo que dizia respeito à arte de guerrear. A utilidade prática do conhecimento na figura do artesão tinha prioridade sobre a meditação e a arte da retórica.

A arquitetura, mesmo que ainda na fase artesanal, desenvolveu-se bastante. Os monumentos, as artes das estátuas e uma série de atividades práticas careciam do cálculo para que se fossem construídos, às vezes, de tamanhos gigantes. No cálculo, o número exige a exatidão rigorosa.

Chega o Renascimento, a filosofia iluminista e as artes em geral são retomadas. É o período do reflorescimento da alegria de viver, dos acontecimentos que marcariam a civilização para sempre, chamada a Idade da Luz, em contraposição à Idade das Trevas.

Ritmos e geometria

O efeito de tirar um som contra o outro – o contraponto – é chamado de polifonia e esta técnica nasceu na França. Isso facilitou a criação de novas formas vocais, como o Motete, o Conducto e o Rondó. Era uma música diferente que surgia chamada de Ars Nova. O Bispo Filipe de Vitry foi o grande teórico dessa nova música que, com outros, deu precisão matemática às regras do canto coral, tornando conscientes certas combinações harmônicas.

Os cantos religiosos se encerraram nas igrejas. Não conseguiam competir com as inovações da música profana. Isso não prejudicou o canto religioso, pelo contrário, ele se desenvolveu numa forma de expressão litúrgica, a Missa. Guillaume de Machaut (1310-1377) escreveu a Missa da Sagração, que é considerada hoje uma obra prima. O verdadeiro espírito da Ars Nova do século XIV se revela na fusão da música erudita com a música clássica.

No início do renascimento, um conceito bastante abstrato de música orientava a invenção dos mestres franco-flamengos. Chegavam a compor, para trinta e seis vozes paralelas, uma virtuosidade contrapontística.

O experimento de Pitágoras com o monocórdio estabeleceu relações matemáticas, entre o tamanho da corda e a nota emitida por ela quando vibrada. No período renascentista esse experimento especulativo adquiriu elementos de natureza matemática. Alguns músicos teóricos como Gioseffe Zarlino, Vivenco Galilei, Benetti e o físico Galileo Galilei colaboraram para a aproximação da música com a matemática. Passou-se grande tempo do século VI a.C. até o renascimento, no século XVI, para que a música e a matemática caminhassem juntas novamente. Desde Pitágoras nada acontecia que pudesse dar continuidade aos experimentos com os sons. Segundo Abdounur (2002), Gioseffe Zarlino (1517-1590) formulou as noções básicas da Tríade Tonal. Estabeleceu que a tônica, a dominante e a subdominante, seriam, respectivamente, a primeira, a quinta e a quarta notas de um certo tipo de escala. Essa invenção teórica trouxe novos rumos à música. Zarlino inseriu novos intervalos consoantes aos descobertos por Pitágoras. Esses intervalos e seus nomes podem ser representados:

Terça maior 4:5

Terça menor 5:6

Sexta Menor 5:8

Sexta Maior 3:5

Vincenzo Galilei contestou como Pitágoras havia relacionado os intervalos musicais através de razões de números inteiros. Os intervalos teriam de ser revistos e ajustados para que a polifonia pudesse se estabelecer completamente. Para Pitágoras o número dava a harmonia perfeita aos sons, não precisava de mais nada para completar a ligação entre a matemática e a música.

Zarlino se interessava pelos sentimentos e usou a proximidade com o povo para criar a Tríade Tonal. O recurso de usar várias vozes na música ajudou a compreender os mecanismos de combinação dos sons de maneira harmônica. Dar um salto em direção às mudanças apontadas por Zarlino e Vincenzo Galilei não foi fácil, já que a visão pitagórica dos intervalos musicais por razões de números naturais, apesar de ter passado tanto tempo, ainda

dominava os experimentos.

A física desenvolveu a música e contribuiu para esta se tornar uma arte autônoma desligada da matemática. Alguns músicos como Marin Mersene (1588-1648) e Zarlino deram sua contribuição nesse sentido. Mersene realizou experiências com uma corda esticada e reproduziu sons que determinavam como a frequência diminui em relação aos parâmetros físicos da corda. Essa frequência de vibração de uma corda depende do seu comprimento, densidade linear e tensão submetida. Zarlino criou um método de divisão do braço de um instrumento em doze semitons iguais por meio de médias geométricas. É o chamado método geométrico de divisão de um segmento em partes iguais

As idéias dos físicos e músicos apontavam para mudanças na concepção da teoria musical. Na opinião de Abdounur (2002), Galileu Galilei deixava isso patente ao escrever, em 1638, que nem a tensão, nem o comprimento e nem a densidade linear de cordas apresentava-se como razão direta e imediata subjacente a intervalos musicais, mas razões dos números de vibrações e impactos de ondas que atingem o tímpano.

Das descobertas proporcionadas em princípio pela vibração de uma corda nasce a acústica, que estuda o fenômeno de como o som se propaga. Giovanni Batista Benedetti foi outro músico que contribuiu para a difusão da música no período renascentista. As idéias de Pitágoras não respondiam as indagações de físicos e músicos da época. Foi a partir das descobertas musicais de Pitágoras que as pesquisas no período renascentista se desenvolveram na direção dos refinamentos dos métodos.

Os sons seriam vibrações no ar geradas pelas oscilações da corda e que mudariam segundo a velocidade da vibração. O tamanho da corda influenciaria nesse experimento físico. Quanto menor o tamanho da corda, mais vibrações ela produziria em um mesmo intervalo de tempo. Quanto menor a corda, mais agudo o som emitido. A consonância seria estabelecida pela coincidência dessas vibrações.

O número subsidiava as primeiras experiências com a música. Nascente, a partir de uma linguagem matemática, tem seu desenvolvimento

complementado pelas leis físicas das vibrações, densidade e composição do ar. Nessa etapa, a proporcionalidade, e não mais as razões como usava Pitágoras, daria conta desse fenômeno mais complexo, de captação da essência do som. Precisa-se de outra linguagem matemática que daria continuidade às pesquisas físicas sobre a natureza do som.

Essa linguagem nasceu com Thales de Mileto (640-560 a.C.), matemático, comerciante, astrônomo, geômetra e estadista. Thales estabeleceu contatos com o Egito e a Mesopotâmia com fins comerciais. Conheceu boa parte da matemática e astronomia babilônica. No longo tempo que passou no Egito aprendeu muita coisa de sua geometria e levou-a para o Grécia. Trabalhou para o Faraó do Egito na medição das pirâmides aplicando o método das semelhanças entre razões, a chamada proporcionalidade.

É atribuído a Thales a enunciação de cinco teoremas da geometria. Pouco para uma obra que viria revolucionar o conhecimento matemático, Os Elementos, de Euclides.

Os cinco teoremas contribuíram para a edição do grande manual do pensamento axiomático. A geometria nasce no ocidente, a partir das viagens de Thales por outros países, se desenvolve com seu discípulo Pitágoras até chegar ao auge na formalização feita por Euclides.

Mas a geometria euclidiana é, de fato, uma matéria emocionante, e a criação de Euclides é uma bela obra cujo impacto rivaliza com o da Bíblia, e cujas idéias foram tão radicais quanto às de Marx e Engels. Com seu livro Os Elementos, Euclides abriu uma janela através da qual a natureza de nosso universo tem sido revelada. (MLODINOW, 2005, p.11).

A identidade de Euclides é contestada por muitos historiadores. Não se sabe ao certo se, de fato, Euclides existiu. Alguns afirmam que em 300 a.C. viveu um homem em Alexandria que poderia ter sido Euclides. A abordagem que ele utilizou na geometria deu nova forma à filosofia e definiu a natureza da Matemática até o século XIX.

Thales e Euclides empreenderam uma linguagem própria à Matemática. O pensamento organiza-se nessa formalização dos conceitos. A sistemática de estruturação da linguagem matemática passa pelo entendimento de uma sintaxe, combinação de signos e da semântica que estuda as relações entre os signos. Os apontamentos gregos que originaram esta linguagem podem ter sido obra de vários autores, e não só de Euclides e Thales.

A música mudou com os estudos dos físicos e músicos. A teoria pitagórica das escalas musicais não explicava novos problemas surgidos com as descobertas de novas possibilidades de sons. Como dizia Pitágoras Tudo é Número. Essa afirmação talvez fosse percebida como uma profecia. Os ensinamentos de Pitágoras tiveram grande repercussão. O fato, mais a religiosidade da filosofia pitagórica, pode ter sido a causa da demora de acontecer o viés que a geometria proporcionaria com o Teorema da proporcionalidade entre segmentos.

Teorema de Thales: Quando um sistema de retas paralelas corta duas retas quaisquer em um plano, os segmentos determinados sobre uma delas são proporcionais aos segmentos homólogos obtidos sobre a outra reta.

Figura 21: Representação geométrica do teorema de Thales

Desenha-se três retas paralelas e duas retas transversais a elas, chamando de A, B, C e P, Q, R as interseções, medindo os segmentos AB, BC, PQ e QR o teorema de Thales diz que, nessas condições, pode-se comprovar a proporcionalidade, substituindo cada segmento pela sua medida.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$$

Galileu Galilei explicitou as propriedades acústicas dos intervalos musicais, tentando provar a proporcionalidade entre altura e frequência. A esta conclusão Benedetti já tinha chegado, embora sem prova científica. A

geometria possibilitou, com o teorema de Thales, que físicos e músicos dessem novos contornos à Física, com o nascimento da acústica e a música com a consonância e dissonância, escalas, temperamento e harmonia.

Conclusão

Os primórdios da música, mesmo que ainda de forma primitiva, representada pelos experimentos do monocórdio, e pelo filósofo e matemático Pitágoras, introduziram, na civilização Grega, as escalas musicais.

A transformação dessa arte, em princípio experimental, em uma dualidade de conhecimentos vai possibilitar o surgimento de novos conceitos, na música e na física. A acústica, a harmonia, o temperamento, são alguns desses conceitos que foram criados ou mesmo mudados.

Nossa pretensão foi introduzir o leitor na compreensão da lógica de formação dos acordes musicais. Música e Matemática mantêm uma relação de proximidade que foi apresentada de uma maneira ainda elementar. Do século VI a.C. até o renascimento, essa constatação nos leva a incorporar idéias mais avançadas que aprofundam essas relações, tomando-se, como ponto de partida, o século XVII até os dias atuais.

Referências Bibliográficas

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. Trad. Alfredo Bosi. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

ABDOUNUR, O. J. *Matemática e Música*. O pensamento analógico na construção de significados. 3. ed. São Paulo: Escrituras, 2003.

Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Disponível em: <<http://www.divulgamat.net>>. Acesso em: Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (R.S.M.E.). Espanha. 2004.

Clase 18 - *El teorema de Thales*: Disponível em:

<http://www.oma.org.ar/omanet/educabri/clase18.htm>. Acesso em: EduCabri. Argentina. 2002.

MLODINOW L. *A janela de Euclides*. A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad. Enézio de Almeida. 3. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2005.

SANTOS, F.M. *Pitágoras e o tema do número*. São Paulo: IBRASA, 2000.

MLODINOW L. *A janela de Euclides*. A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad. Enézio de Almeida. 3. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2005.

SANTOS, F.M. *Pitágoras e o tema do número*. São Paulo: IBRASA, 2000.

SINGH, Simon. *O último Teorema de Fermat*. A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Trad. Jorge Luiz Calife. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

Universidad de Santiago do Chile. Disponível em: <<http://www.mat.usach.cl/histmat/html/thal.html>>. Acesso em: Thales de Mileto. Chile.