

## **A ARGUMENTAÇÃO NAS ATIVIDADES DE GEOMETRIA DESENVOLVIDAS POR ACADÊMICOS DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Antonio Sales<sup>1</sup>  
Luiz Carlos Pais<sup>2</sup>

**RESUMO:** Este artigo tem por objetivo apresentar o resultado de uma atividade de pesquisa na Educação Matemática envolvendo a argumentação em um curso de Licenciatura de Matemática. Situa a argumentação no contexto das provas e demonstrações e discute a sua importância na Educação Matemática. Apresenta uma síntese da Teoria Antropológica do Didático, utilizando-a como suporte teórico para análise da atividade e se insere no contexto da pesquisa qualitativa do Tipo Etnográfico. Alguns resultados apontam para a presença da argumentação lógica na resolução apresentada pelos acadêmicos e institui um teorema até então desconhecido por eles

**PALAVRAS-CHAVE:** argumentação, teoria antropológica do didático, educação matemática.

**ABSTRACT:** This article aims to present the result of an activity of research in mathematical education involving the argument of a licenciate Course in Mathematics. It points out the argumentation in the context of the evidence and statements and discusses its importance in the Mathematical Education. It presents a synthesis of the Anthropological Theory of the Didactic and uses it as theoretical support for analysis of the activity and fall within the contest of the kind of qualitative research Ethnography. Some results point with respect to the presence of the logical argumentation in the resolution presented by academics and establishing a theorem until then unknown for them.

**KEYWORDS:** argumentation, anthropologic theory of the didactic, mathematical education.

---

<sup>1</sup> Professor Doutor da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina, MS, e integrante do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar (GPHEM E). *E-mail:* a.sales@terra.com.br

<sup>2</sup> Professor Doutor do Departamento de Educação da UFMS, Professor do PPGEDU/UFMS, Orientador do Projeto de Pesquisa e Coordenador do GPHEM E. *E-mail:* lcpais@nin.ufms.br

### **Introdução**

Este artigo tem por finalidade apresentar a análise da argumentação produzida por acadêmicos do primeiro ano de Licenciatura em Matemática na resolução de uma tarefa de geometria euclidiana. Uma análise que é apenas um fragmento de um trabalho de maior amplitude, que culminou em uma tese de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEDU/UFMS), *campus* de Campo Grande. Insere a argumentação no contexto da prova e da demonstração, levando em conta que: demonstrar, justificar e provar são ações presentes no estudo da Matemática, não necessariamente nessa ordem, mas sempre significando que o cumprimento da tarefa proposta não estará completo se não for devidamente comprovado, ou explicado, segundo regras pré-estabelecidas e aceitas como verdadeiras. São ações que desempenham um papel fundamental no estudo e no ato de fazer a Matemática.

Essas ações estão presentes desde o século VI a.C., quando Tales de Mileto pensou dedutivamente na geometria e provou alguns teoremas (BOYER, 1996), os quais ganharam destaque quando, séculos depois, Euclides de Alexandria (séc. III a.C.) sistematizou a Matemática produzida até os seus dias, nos treze volumes dos Elementos. Desde então, o estudo dessa ciência tem sido conduzido tendo em vista a formalização dos conceitos definidos pelo matemático e a demonstração das propriedades desses conceitos (BICUDO, 1999). Essas propriedades, uma vez demonstradas, são em seguida despersonalizadas, descontextualizadas e generalizadas, de modo que podem ser aplicadas em contextos mais amplos. A sistematização e a formalidade é um fim a ser perseguido, especialmente no presente contexto, em que predomina a concepção formalista encabeçada por David Hilbert (SNAPPER, 1984; BRASIL, 1998). A formalidade é uma característica essencial e inconfundível da Matemática.

Até mesmo em sala de aula, no ensino fundamental, o seu estudo, através dos livros didáticos, por vezes, apresenta-se excessivamente formal e precocemente sistematizado (BRASIL, 2007). Essa abordagem reveste a Matemática de uma ausência de flexibilidade e a desprovê da potencialidade de “ser o motor de inovações e de superação dos obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento” (BRASIL, 1998, p.26).

Entendemos que a demonstração tem uma grande contribuição para a aprendizagem da Matemática, mas que essa contribuição somente se efetiva quando são elaboradas atividades de tal modo que a demonstração seja a culminância de um processo. Há, no nosso entender, alguns procedimentos que devem preceder a demonstração,

procedimentos esses que são insuficientes em si mesmos para se constituírem em um final de processo e, por essa razão, possuem a flexibilidade necessária para conduzir à percepção da necessidade de um procedimento mais completo, que é a demonstração. Esses procedimentos pré-demonstrativos ao mesmo tempo que contribuem para o desenvolvimento da habilidade de demonstrar também contribuem para convencer da necessidade da demonstração.

Entendemos que quando a demonstração é apresentada, de antemão, como um fim improrrogável, ou então é utilizada antes mesmo que a questão proposta esteja esclarecida, faz transparecer um caráter impositivo. Apresentada dessa forma, ela encerra abruptamente o assunto e, como vivemos em um contexto social em que o debate é valorizado, gera a questão: por que o ensino da Matemática acontece na contramão do contexto histórico em que vivemos?

Em um contexto de estudo da Matemática entendemos que há momentos de informar, que consiste em explicar, apresentar o conhecimento; há momentos de convencer, que consiste em justificar, provar e demonstrar e há momentos de utilizar o conhecimento para resolver os problemas. Estamos supondo que esses momentos de informar, convencer e resolver são muito próximos, indissociáveis e que os dois últimos são facilmente confundíveis, pois um problema está efetivamente resolvido quando a pessoa está convencida da resposta encontrada.

A explicação se faz presente, nesse processo, no instante em que se buscam as informações existentes para organizar o trabalho de resolução ou convencimento. A todo esse processo de informar, convencer, resolver denomina-se argumentação. No nosso trabalho de pesquisa, estamos interessados na argumentação que ocorre no ato de resolver tarefas de geometria euclidiana.

Distinguimos também três níveis de precisão e formalidade da argumentação. O primeiro deles é a argumentação ou explicação, de caráter mais geral, que contém a prova e a demonstração, porém, não está restrita a estas. É toda tentativa de esclarecer, provar, convencer, estabelecer uma verdade. É todo discurso que procura conduzir a uma conclusão. Esse discurso, às vezes, é ingênuo ou “folclórico”, tendo por base fatos isolados, a fala de alguém ou ideias pré-concebidas. No entanto, no estudo da Matemática, o interesse é direcionado para a argumentação que se fundamenta em elementos racionais originários da própria Matemática.

O segundo nível é o da prova. De caráter mais específico, ela se aproxima mais da demonstração, podendo ser confundida ou coincidir com esta. A prova, em Matemática, pode conter elementos empíricos e ter por base os experimentos. Podemos fazer uma prova por “exaustão”

com o uso da calculadora ou computador até ultrapassar determinado limite. De modo mais amplo, dizemos que a prova é um argumento aceito como válido por um grupo social não especializado. É toda argumentação que levou ao convencimento. Um convencimento que pode ser definitivo ou temporário.

No terceiro nível está a demonstração. Esta é uma prova aceita pelos matemáticos. Ela possui formalidade, já possui uma conclusão pré-estabelecida, parte de premissas aceitas como verdadeiras e tem caráter conclusivo ou definitivo.

Embora a demonstração também seja uma argumentação, a sua incontestabilidade, o excesso de rigor que a constitui, seu formalismo a *priori* e o seu fim já conhecido de antemão são fatores que a tornam questionável do ponto de vista da educação. Sendo ela o ponto final de uma procura, o encerramento de um debate, discute-se o seu valor formativo em um contexto de valorização do diálogo. Especialmente quando, conforme já foi dito em linhas anteriores, ela é imposta, isto é, é utilizada para “convencer” quem ainda não se deu conta do que está sendo tratado.

A teoria de análise adotada, que será exposta em parágrafos posteriores, pressupõe que o estudo é uma ação institucionalizada e que ocorre em um contexto social. Eventualmente esse contexto pode ser composto por uma única pessoa, mas, de modo geral, o estudo se dá no embate sócio-cognitivo, mesmo que o outro não esteja presente, em pessoa, em determinado instante, como acontece quando se prepara para enfrentar os questionamentos de uma banca examinadora, por exemplo. É um a perspectiva que valoriza a argumentação.

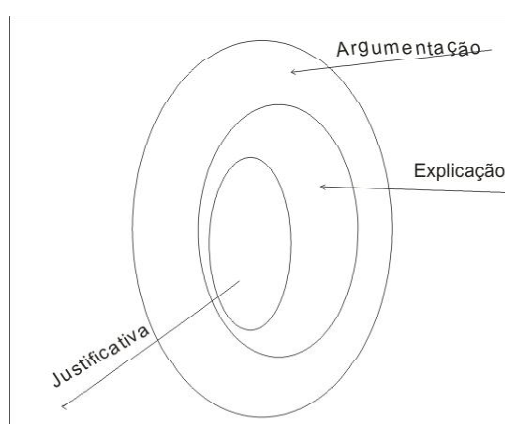
Uma argumentação é suficientemente lógica se alcançar o seu objetivo (DEWEY, 1928, p. 99) e uma demonstração é uma argumentação produzida em conformidade com o ritual aceito pela comunidade científica. Nesse caso, explicação, justificativa e prova são elementos pré-demonstrativos.

Nessa forma de entender, em uma argumentação, há aspectos explicativos e aspectos justificativos. Pressupomos que a explicação seja mais ampla do que a justificativa. Isso significa dizer que a segunda está contida na primeira conforme esquema que apresentamos abaixo. Entendemos que a diferença entre ambas está na intencionalidade.

O aspecto explicativo de uma argumentação tem sua ênfase no esclarecimento, podendo ou não ter por objetivo justificar. Explicar não implica, necessariamente, uma defesa, uma prestação de contas. Pode significar apenas um esclarecimento ou a reunião de informações necessárias para produzir as demais etapas do processo. A justificativa,

porém, sempre implicará numa defesa de um ponto de vista, de uma ação, de um fato, ou, no caso específico da resolução de uma tarefa matemática, na defesa de um determinado passo resolutivo, na defesa de uma técnica ou de um resultado. Nesse último caso, a técnica utilizada na resolução da tarefa proposta pode ser a própria justificativa do resultado.

Dessa forma, estamos entendendo que quem explica pode ter ou não a intenção de justificar, mas quem se propõe a justificar terá, necessariamente, que recorrer a uma explicação. O esquema (Figura 1) a seguir resume o exposto:



**FIGURA 1** - Relação entre explicação e justificativa.

De qualquer forma, não se explica ou se argumenta por nada e não se concebe uma argumentação sem interlocutores, ainda que temporariamente ausentes. Oléron (1987) define argumentação como o processo pelo qual uma pessoa, ou um grupo, tenta conduzir um público a adotar uma posição por meio do recurso da apresentação de assertivas, cujo objetivo é mostrar a validade, a lógica ou consolidação da proposta apresentada. Dessa forma, entendemos que a atividade de argumentar é composta por elementos racionais.

Toulmin (1993) entende que a argumentação é a prática da lógica. É a relação entre a lógica e o cotidiano. Toda argumentação é uma maneira de explicar algo.

A lógica, segundo ele, não se ocupa das coisas do “espírito”, do pensamento puro, mas dos modos de pensar, dos hábitos e práticas que são adquiridos no processo de evolução da sociedade. Defende também

o direito da lógica, enquanto ciência, de distinguir bons e maus modos de conduzir uma argumentação, de separar os argumentos corretos dos argumentos “aberrantes”.

Para Toulmin, separar a lógica da argumentação é pressupor uma lógica sobre o nada e, nesse sentido, vemos que ele se aproxima da Teoria Antropológica do Didático (TAD), concebida por Chevallard, Bosch e Gascón (2001), que será o nosso aporte de análise. A TAD pressupõe que toda a atividade humana faz sentido em um contexto social. Toulmin é pragmático e oferece um esquema para análise da argumentação.

### **TAD: uma teoria da prática**

Os autores analisam o estudo da Matemática em termos de praxeologia. Praxeologia é uma teoria que se ocupa da atividade humana ou, mais precisamente, da ação eficiente. Essa teoria denomina-se de antropológica porque discute processos imbuídos do conhecimento como produto social, no seio das instituições sociais.

É uma teoria do *didático* por considerar que cada tema a ser estudado deve ser objeto de um tratamento específico da didática. Didático se refere ao estudo. Nessa perspectiva teórica, há produção ou apropriação de conhecimento sempre que houver um problema, de qualquer natureza, cuja solução exige que se construa um conhecimento ou se aproprie de um já existente. Esse problema é produzido no contexto das instituições sociais, cujas explicações, justificativas e técnicas utilizadas na sua resolução se processam conforme a lógica institucionalizada.

A TAD se constitui num modelo de análise do estudo da Matemática a partir do próprio conteúdo, uma vez que o problema da dificuldade na sua aprendizagem, segundo esse ponto de vista, não está no sujeito que ensina e nem no sujeito que aprende, mas no próprio conhecimento. O estudo da Matemática tem estatuto próprio, uma forma própria de se organizar e se justifica por uma argumentação própria.

A praxeologia didática, nesse contexto, tem duas faces. Uma é a organização matemática que está relacionada à disposição dos objetos matemáticos a serem utilizados. A outra face é a organização didática que consiste em mobilizar planejamentos, ações e instrumentos para que o objetivo proposto seja alcançado. É a organização de ações com o objetivo de envolver o sujeito no processo, desafiá-lo por meio de um problema. As duas são inseparáveis e interdependentes. Portanto, praxeologia está sendo concebida como a teoria da forma eficaz de estudar Matemática visando à utilização dos objetos matemáticos.

De acordo com a TAD, uma organização matemática, com o objetivo de estudar sempre que houver indivíduos dispostos a isso em sala de aula

ou fora dela, é composta de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria. Os conceitos e os símbolos matemáticos recebem a denominação de objetos matemáticos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999).

O elemento mais amplo considerado numa praxeologia é a teoria. É ela que embasa a tecnologia. Teoria nos transmite a ideia de generalidade e abstração; algo afastado das preocupações utilitárias e elementares. Corresponde a um contemplar o cenário em busca das causas, das relações, dos objetivos, enfim, dos porquês.

Tecnologia não tem o sentido de artefato, um utilitário resultante de uma investigação científica, como normalmente se concebe. No contexto da TAD, tecnologia significa a explicação da lógica do funcionamento do artefato, a justificativa racional do princípio de funcionamento e das razões da sua existência. Tecnologia é a **argumentação** utilizada para tornar válido o processo e a conclusão da tarefa. Tecnologia é a justificativa da técnica.

Tarefa é a atividade proposta com o objetivo de desafiar, de conduzir a uma constatação das propriedades de um objeto matemático, de aplicar as propriedades de um objeto na resolução de um problema ou de representar o próprio objeto. A técnica, por sua vez, consiste na mobilização de recursos intelectuais e emocionais e na “manipulação” dos objetos matemáticos, com a finalidade de resolver a tarefa proposta. É o procedimento.

No que se refere aos objetos, a TAD concebe que um objeto matemático é uma construção social e por isso tem uma representação também social, embora nem sempre semiótica. Os objetos dividem-se em duas categorias: os ostensivos e os não-ostensivos. Os que têm materialidade e os que não têm materialidade. Um objeto é ostensivo quando se mostra, se faz sentir, enquanto os objetos denominados não-ostensivos são os que não se mostram por si mesmos por pertencerem ao campo das ideias. São os conceitos. Eles são “vistos” e “manipulados” por meio dos objetos ostensivos. A grafia, a palavra falada, o desenho, o gesto, os símbolos são formas de construir, abordar, manipular, dar visibilidade aos objetos matemáticos não-ostensivos. Estes são os objetos ostensivos.

Na resolução de uma tarefa proposta, recorre-se a uma ou mais técnicas. Essas técnicas, quando conduzem a uma resolução correta, são explicadas pela tecnologia, isto é, por uma argumentação que, por sua vez, se apoia na teoria geral da ciência da qual faz parte a tarefa proposta. A **argumentação** ou tecnologia é o elo entre a técnica e a teoria.

Mas a TAD pressupõe ainda que todo estudo é composto por diversos “momentos didáticos” (CHEVALLARD, 2001), momentos vivenciados simultaneamente e que se constituem na tessitura do

processo, que consiste em se deparar com o problema, envolver-se na busca de uma técnica de resolução, ampliar a eficácia dessa técnica por intermédio de um discurso tecnológico e a verificação se os passos seguidos estão amparados pelo arcabouço teórico da ciência da qual o problema faz parte.

Essa teoria se ocupa da lógica existente no processo de estudar matemática. Procura explicar como ocorrem as organizações, como as tarefas são desenvolvidas e explicadas, os momentos didáticos vivenciados durante o processo e os elementos racionais, oriundos da teoria, evocados na argumentação.

### **A metodologia da pesquisa**

A atividade matemática analisada a seguir foi elaborada visando a estudar as organizações que os acadêmicos colocam em prática ao desenvolver o discurso explicativo ou o justificativo durante as atividades de geometria euclidiana. Ao propor a atividade, pretendia-se observar os objetos ostensivos utilizados, as técnicas utilizadas e as justificativas apresentadas, isto é, a pertinência da tecnologia utilizada e a lógica da argumentação. Visava também a identificar e analisar os “momentos didáticos” vivenciados pelos acadêmicos na resolução de uma tarefa. Em outras palavras: descrever as organizações matemática e didática posta em ação durante o estudo.

Foi uma pesquisa conduzida em sala de aula com quarenta acadêmicos do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática e desenvolvida durante o primeiro semestre de 2009. Os dados foram coletados no momento em que surgiam em decorrência do envolvimento dos acadêmicos. A coleta se processou, principalmente, através de fotos, gravações e diário de bordo (ANDRÉ, 2008).

No início do ano foi solicitada aos acadêmicos a permissão de conduzir uma pesquisa a partir do trabalho com a participação deles. Foram informados de que muito do material que viesse a ser produzido por eles seria analisado à luz de uma teoria e que poderia servir como material para publicação.

As tarefas eram propostas para serem resolvidas em grupos de, no máximo, quatro pessoas, ficando os acadêmicos livres para o diálogo com outros grupos, tendo em vista que se tratava de uma pesquisa que envolvia a argumentação justificativa. Cada grupo precisava convencer os outros da validade da resposta encontrada ou da pertinência da técnica utilizada. Como houve muita disposição para colaborar e envolvimento



na resolução das tarefas propostas, o ambiente se tornou rico em argumentações.

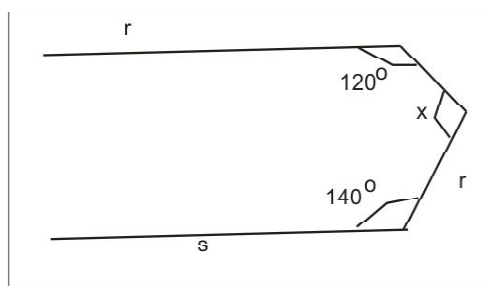
Todo trabalho foi desenvolvido em um contexto de estudo da geometria euclidiana, no qual muitas atividades, envolvendo os conceitos de paralelas e transversais, ângulos colaterais internos e colaterais externos, ângulos alternos internos e alternos externos, ângulos complementares e suplementares foram trabalhadas. A congruência entre ângulos alternos internos, entre ângulos correspondentes e entre ângulos alternos externos foi postulada. A condição de que os ângulos colaterais internos e os colaterais externos são suplementares entre si foi verificada, justificada e provada. Várias atividades foram desenvolvidas envolvendo essas propriedades.

O resultado que será exposto a seguir faz parte de uma pesquisa de maior amplitude, conforme exposto em parágrafos precedentes. Todo trabalho foi desenvolvido na perspectiva da Etnografia, conforme André (2008). Por se desenvolver em ambiente de sala de aula, envolvendo um grupo de pessoas com a mesma perspectiva profissional, que vivenciam a mesma organização didática, proveniente de escolas públicas de uma mesma região e, portanto, supostamente com uma variação cultural e escolar não muito grande, optou-se por desenvolver uma pesquisa do **tipo etnográfico**.

#### A tarefa proposta e a sua resolução

Esta tarefa apresentava o seguinte enunciado: “Sabendo que  $r // s$ , calcule  $x$ ” (GONÇALVES JÚNIOR, 1995, p.57):

A Figura 2 contém, portanto, o problema, onde  $r$  e  $s$  são assumidas como retas e paralelas entre si.



**FIGURA 2** - A tarefa proposta (GONÇALVES JR., 1995, p.57).

A técnica que se esperava que fosse usada para resolver a tarefa consistia na construção de uma reta passando pelo vértice do ângulo, cuja

medida se quer determinar e que seja paralela às retas  $r$  e  $s$ . A soma dos ângulos suplementares, dos alternos internos dos ângulos dados no problema seria a solução imediata do problema. Dessa forma:  $x = [(180^\circ - 120^\circ) + (180^\circ - 140^\circ)] = 100^\circ$ . Tendo em vista que essa técnica é praticada pela maioria dos autores que propõem esse tipo de tarefas, esta é denominada de técnica canônica e supomos que seria a de uso imediato.

No entanto, a técnica apresentada por um grupo foi outra. Damos, a seguir, a descrição resumida da técnica usada pelo grupo e que foi exposta por uma acadêmica representando o grupo.

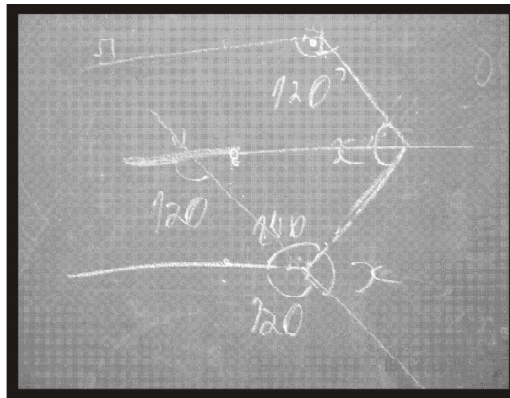
Solução apresentada:

**“a soma dos três ângulos é  $360^\circ$ , logo,  $120^\circ + 140^\circ + x = 360^\circ$  e  $x = 100^\circ$ ”.**

Diante da apresentação dessa técnica tão resumida, e sem esclarecimentos, a discussão foi conduzida para a validade da afirmação: “a soma dos três ângulos é  $360^\circ$ ”. É a partir desse ponto que a tarefa se constitui em uma nova tarefa. Enquanto os acadêmicos se reorganizavam, procurávamos socializar a norma institucional de que toda afirmação dessa natureza é válida se for devidamente provada, usando os recursos que a teoria nos proporciona.

Um grupo anunciou pouco tempo depois que tinha a prova. O convite para expor foi atendido por um representante do grupo, que veio imediatamente ao quadro.

A Figura 3 é a foto da técnica apresentada pelo acadêmico, na qual ele pula o passo de indicar um correspondente do ângulo de  $120^\circ$ :



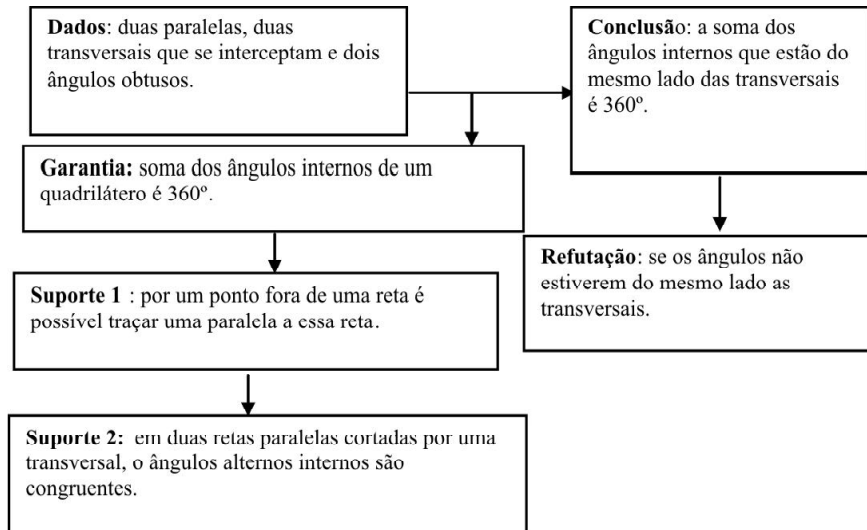
**FIGURA 3** - Foto da resolução da tarefa.

**Análise da praxeologia dos acadêmicos**

Os parágrafos seguintes, incluindo a tabela e o esquema, contêm a análise, na perspectiva da TAD, da técnica, da argumentação, dos registros de linguagem utilizados e dos momentos didáticos vivenciados na resolução da tarefa. Traz também um esquema de análise do argumento na perspectiva de Toulmin.

**TABELA 1 - Descrição da técnica matemática usada para resolver a nova tarefa.**

<b>Técnica <math>\tau</math></b>	<b>Elementos Tecnológicos</b>
Passo 1. Traçar uma reta paralela às retas $r$ e $s$ , passando pelo vértice do ângulo de valor desconhecido. Chamemo-la de $v$ .	Por um ponto fora de uma reta é possível traçar e uma e só uma paralela a ela. Quinto postulada de Euclides.
Passo 2. Prolongar um dos segmentos cuja semirreta suporte constitui um dos lados do ângulo de valor desconhecido, de modo a interceptar a outra paralela. Chamemo-la de $t$ (Este passo não teve registro permanente).	Um segmento pode ser prolongado indefinidamente.
Passo 3. Traçar uma reta (chamemo-la de $u$ ) paralela à semirreta $t$ , passando pelo vértice do ângulo que a outra semirreta transversal forma com a reta paralela de origem. Esse ângulo é dado no problema.	O mesmo do primeiro passo.
Passo 4. Determinar um ângulo que a reta $u$ forma com uma das paralelas e que seja correspondente do ângulo que a semirreta $t$ forma com a paralela de origem. (Este passo não foi registrado).	Propriedades do paralelismo. Ângulos correspondentes.
Passo 5. Identificar o ângulo que a reta $v$ forma com a reta $u$ que seja correspondente ao ângulo que a semirreta $t$ forma com a reta de origem e é dado no problema.	Além do elemento do passo anterior, aqui inclui a propriedade transitiva da igualdade (ou congruência de ângulos).
Passo 6. Identificar na intersecção, da reta $u$ com uma das paralelas (reta $s$ conforme Figura1), o ângulo que seja correspondente ao identificado no passo anterior e que seja adjacente ao outro ângulo dado no problema.	Ângulos correspondentes. Ângulos adjacentes têm um lado comum entre eles.
Passo 7. Identificar o ângulo adjacente ao identificado no passo anterior e que seja alterno interno com o ângulo desconhecido, tendo uma das paralelas originais como transversal.	Ângulos alternos internos são congruentes.
Passo 8. Indicar o ângulo de volta completa formado pelos seguintes ângulos: a) alterno interno de $x$ ; b) externo e correspondente do ângulo que a semirreta $t$ forma com a reta de origem e c) o ângulo que foi interceptado pela reta $u$ .	Soma de ângulos. Ângulo, de volta completa, mede $360^\circ$ .

**Esquema de Toulmin** <sup>(3)</sup>

De alguma forma, os elementos teóricos dessa praxeologia foram expostos no quadro acima e na descrição da metodologia. Nesse caso, tivemos uma atividade dinâmica, em que uma técnica gerou um novo problema e apelou para novos resultados tecnológicos. Esses resultados fortaleceram a técnica apresentada e produziram novos resultados (CHEVALLARD, 2001). Tivemos na perspectiva de Toulmin o estabelecimento de uma verdade.

Parte da OD dessa atividade foi explicitada na introdução da tarefa. Um elemento novo surge nesse caso. Foi o desafio para se provar que a soma dos ângulos dados mais o ângulo a ser determinado era de 360°. Uma organização didática que surgiu de repente, pois a solução esperada passava por outra técnica. Nessa OD foram privilegiados o diálogo, os desafios, as conjeturas e a argumentação. Essas são competências complexas segundo avaliadores do PNL (BRASIL, 2007) que devem ser desenvolvidas na Educação Básica e os sujeitos da pesquisa são futuros professores desse nível de escolaridade.

Embora apenas um acadêmico tenha exposto a técnica, todo trabalho foi desenvolvido em grupo com a participação da classe, tendo em vista que esta, normalmente, é consultada e opina a qualquer instante

<sup>3</sup> Segundo Toulmin, todo argumento válido expõe a sua própria limitação, antevendo as possíveis refutações.

quando uma ideia é exposta por um grupo. De qualquer forma, o trabalho, no mínimo, foi de uma dupla.

O primeiro grupo não explicitou como lhes sobreveio a ideia de que a soma daqueles ângulos era  $360^\circ$ . Até o instante em que foi exposta, nenhuma alternativa tinha sido proposta pela classe, portanto, a solução apresentada foi resultado de uma conjectura do próprio grupo.

É possível, no entanto, inferir que tenha advindo da visualização de um quadrilátero construído a partir do traçado de uma paralela a uma das transversais e passando pelo ponto de intersecção da outra transversal com uma das paralelas.

Essa inferência decorre do fato de que essa tarefa voltou à tona na sessão seguinte e essa solução foi apresentada por outro acadêmico que fazia parte do primeiro grupo. Dessa forma, podem-se destacar diversos “momentos didáticos” que foram vivenciados nessa atividade.

O contato com o problema de forma refletida, assumindo o problema como seu, é um desses momentos. Nesse contexto, ocorreu uma multiplicidade de questões que não conseguimos precisar, porque ficamos perdidos nas falas, nos gestos e nos esboços que não colhemos.

Houve o momento da exploração de uma técnica. Aliás, mais de uma técnica, porque, após a solução, quando apresentada a outros grupos, estes tentaram encontrar outras técnicas de resolução, muitas delas descartadas, por serem insuficientes. Houve o momento da institucionalização, quando se formulou o teorema e efetuou-se a sua demonstração segundo técnicas institucionalizadas.

Naquele contexto, foi produzida uma matemática nova para todos os envolvidos no processo. Foi descoberto e demonstrado um teorema que pode enunciado da seguinte forma:

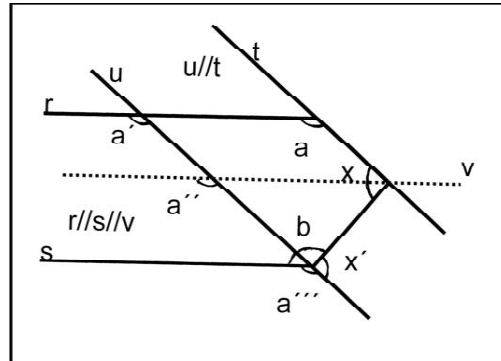
São dadas duas retas paralelas. Se essas paralelas são cortadas por duas transversais que se interceptam na região interna em relação às paralelas, então a soma dos ângulos internos, que estão de um mesmo lado das transversais, é  $360^\circ$ .

Hipótese:  $r$  e  $s$  são paralelas,  $t$  e  $u$  são transversais que se interceptam na região interior das paralelas.

Tese: a soma dos ângulos internos que estão de um mesmo lado das transversais é  $360^\circ$  ( $a+b+x=360^\circ$ ).

A demonstração do teorema (Figura 4), após traçar a reta  $u$ , pode ser resumida, levando em conta que os ângulos  $a=a'$ ,  $a'=a''$ ,  $a''=a'''$ , por serem correspondentes e  $x=x'$  por serem alternos internos em relação a uma das transversais. Observa-se que  $a''' + b + x = 360^\circ$  e o teorema fica demonstrado<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Destacamos que a demonstração terá um passo a menos se for eliminada a reta  $v$ , que é desnecessária. Destacamos, ainda, que há outras formas de demonstrar o mesmo teorema. Esta foi escolhida por coincidir com o raciocínio dos acadêmicos.



**FIGURA 4** - Demonstração do teorema.

Esse é um teorema que deve ser antigo e ter sido enunciado e provado por muitos outros, mas que não era conhecido pelos acadêmicos envolvidos. Foi um teorema novo para eles e recebeu dos próprios envolvidos o nome de Kamyle, em homenagem à acadêmica que fez a primeira exposição, em nome do seu grupo, e que produziu o desafio.

Entendemos que dentre as múltiplas razões apresentadas para inserção do estudo da Matemática e, particularmente, da geometria euclidiana na Educação Básica, a perspectiva de que ela permite descobertas sem pôr em risco a integridade das pessoas seja uma delas.

Na Matemática, os experimentos podem ocorrer à vontade, porque, se conduzida em um contexto ético, não causam danos. A "toxicidade" de um erro matemático está restrita ao campo da ética, especificamente, da ética do professor. Dessa forma, o que parecia ser um erro do grupo representado pela Kamyle e que, em outra ciência, poderia conter riscos, resultou em uma experiência enriquecedora e digna de ser relatada.

Na perspectiva da TAD, esses são momentos didáticos importantes, porque institucionalizam práticas, levam ao estudo, geram explicações e promovem a busca pela tecnologia.

Os registros de linguagem utilizados na apresentação da técnica e na exposição da solução encontrada foram todos centrados na verbalização, nos gestos e nos traçados geométricos por serem os que mais facilitam a comunicação. Em uma linha de pensamento marcada pelo formalismo, esses registros não são estimulados por lhes faltar o rigor. No entanto, a TAD, ao partir do pressuposto de que o conhecimento é uma produção social e que os registros de linguagem exercem um importante papel na comunicação das ideias, enfatiza a importância desses registros

na manipulação dos objetos matemáticos. Não há, nessa perspectiva, supremacia entre os registros durante uma organização didática. Os registros verbais e gestuais também podem compor uma praxeologia, uma ação eficaz no estudo da Matemática, em que os gestos complementam as dificuldades de verbalização, de escrita e de traçados geométricos. O percurso da mão de quem explica ou os movimentos corporais explicitam o pensamento quando um traçado ou uma palavra se mostram insuficientes.

### **Considerações finais**

De alguma forma, a análise da praxeologia dos acadêmicos já contempla nossas considerações. Nesse ponto destacaremos apenas mais alguns elementos que ficaram apenas implícitos nos parágrafos precedentes. Um desses pontos consiste em destacar como a manipulação de objetos matemáticos não-ostensivos, através de objetos ostensivos, contempla a vivência de diversos “momentos de estudo” e pode conduzir sistematicamente para estágios formais e conclusivos.

Outro ponto a destacar é que os registros de linguagem de caráter temporário, como é o caso dos gestos e dos registros orais, necessitam ser complementados pelos registros de caráter permanente (geométrico, algébrico e o escrito na língua materna), isto é, serem avaliadas e validadas pela comunidade científica. Somente após a validação, essa técnica, e a solução encontrada, poderão se tornar instrumentos para a resolução de outras tarefas do mesmo tipo. Não obstante, essa “convivência” de registros temporários com registros permanentes é consequência direta do processo interacionista adotado, portanto, esperada.

Um terceiro ponto é que no teorema Kamyle ficou evidente o desejo de verdade e a necessidade de buscar argumentos para convencer, no sentido matemático. Esse é um fator relevante, porque a TAD busca explicar o processo didático que se manifesta nessa procura pela verdade e a função da escola é encaminhar para a verdade científica. O exercício de transformar uma resposta dada em uma nova tarefa evidenciou também a possibilidade de se vivenciar uma experiência científica em sala de aula.

### **Referências**

- ANDRÉ, M. E. D.A. *Etnografia da prática escolar*. 14.ed. Campinas-SP: Papirus, 2008.
- BICUDO, I. História da matemática: o pensamento da filosofia grega antiga e seus reflexos na educação matemática do mundo ocidental. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p.117-127.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Organiser l'étude: theories & empires. In: DORIER, J. L. et al. (Eds.). *Actes de la 11<sup>è</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques-corps*, 21 -30 Août 2001, p.23-40.

BOYER, C. B. *História da matemática*. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. *Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática*. Brasília: MEC, 2007.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. Ostensivos e sensibilidade aos ostensivos na atividade matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble Cedex - France, v.19, n.1, p.77-124, 1999.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude: structures & fonctions. In: DORIER, J. L. et al. (Eds.). *Actes de la 11<sup>è</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques-corps*, 21 -30 Août 2001, p.3-22.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DEWEY, J. *Cómo pensamos*. Madrid: Ediciones de la Lectura, 1928.

GONÇALVES JÚNIOR, O. *Matemática por assunto: geometria plana e espacial*. São Paulo: Scipione, 1995.

OLÉRON, P. *L'Argumentation*. 2.ed. Paris: Presses Universitaires de France, 1987.

SNAPPER, E. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. *Humanidades*, Brasília, v.2, n.8, jul/set 1984.

TOULMIN, S. E. *Les usages de l'argumentation*. Paris: PUF, 1993.

Recebido em: 05/09/2009

Aprovado em: 01/04/2010