RECET - Revista de Ciências Exatas e Tecnológicas

Sinop, v.1, Jul.-Dez. 2023/Jan.-Dez.2024
Recebido: 21-09-2023; Aceito: 02-10-2023
e-ISSN: 2965-9558; Artigo: e012401

MODELAGEM MATEMÁTICA E O ENSINO DE FUNÇÕES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

MATHEMATICAL MODELING AND FUNCTION TEACHING: AN APPROACH FOR HIGH SCHOOL

Maurinete Costa dos Santos [1]; Raul Abreu de Assis [2]; Luciana Mafalda Elias de Assis [3].
[1] UNEMAT-maurinete.snp@hotmail.com; [2] UNEMAT-raul.assis@unemat.br; [3] UNEMAT-luciana.assis@unemat.br.

Resumo

Este estudo tem como objetivo empregar a Modelagem Matemática como uma abordagem de ensino destinada a estudantes do Ensino Médio, utilizando o computador como uma ferramenta essencial para cálculos e representações. Utilizamos as funções afim, potência e exponencial para descrever a variação em relação ao tempo do fluxo de saída dos alunos após término do turno de aulas em uma escola estadual no Estado de Mato Grosso ao longo de três dias consecutivos. Por ser destinada ao Ensino Básico, apresentamos uma sequência didática para auxiliar o professor em como trabalhar uma atividade em que os alunos compreendam um problema real por meio da Modelagem Matemática, além de desenvolver habilidades com a utilização dos softwares GeoGebra e Excel.

Palavras-chave *— Ensino Médio, Modelagem Matemática, Aprendizagem, Funções.*

Abstract

This study aims to employ Mathematical Modeling as a teaching approach dedicated to high school students, using the computer as an essential tool for calculations and representations of mathematical concepts. We use the affine, power and exponential functions to describe the variation in relation to time of the outflow of students after the end of the class shift at a state school in the State of Mato Grosso, measured over three consecutive days. As it is intended for Basic Education, we present a didactic sequence to assist the teacher in how to work on an activity in which students understand a real problem through Mathematical Modeling, in addition to developing skills using GeoGebra and Excel softwares.

Keywords *— High School, Mathematical Modeling, Learning, Functions.*

1. INTRODUÇÃO

Quando abordamos qualquer tema que envolva o ensino e a aprendizagem que busque desenvolver capacidades críticas de análise, não podemos deixar de destacar a Modelagem Matemática. Tal metodologia promove um aprendizado contextualizado e que une, naturalmente, teoria e prática, além de servir como metodologia facilitadora na captação do interesse dos estudantes. Nesse sentido, podemos definir a Modelagem Matemática de acordo com Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014). Para estes autores, "a modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação sobre a realidade carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador". Assim, Modelagem Matemática representa uma estratégia de ensino e aprendizagem destinada a auxiliar os alunos na superação de potenciais desafios no estudo da Matemática. Também contribui significativamente para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos, incentivando o pensamento crítico e promovendo a colaboração entre os alunos, ao mesmo tempo em que torna o Ensino da Matemática mais cativante e relevante.

Vale observar que muitos autores contribuíram para o avanço da Modelagem Matemática como estratégia de ensino, tornando-a ainda mais relevante no ambiente escolar. Como exemplo, podemos citar Kluber e Burak (2008). Para esses autores, a Modelagem Matemática no contexto do Ensino Básico, é distribuída em etapas sendo descritas como:

> Escolha do tema – é o momento em que o professor apresenta aos alunos alguns temas que possam gerar interesse ou os próprios alunos sugerem um tema. Esse tema pode ser dos mais variados, uma vez que não necessita ter nenhuma ligação imediata com a matemática ou com conteúdos matemáticos, e sim com o que os alunos querem pesquisar. Já nessa fase é fundamental que o professor assuma a postura de mediador, pois deverá dar o melhor encaminhamento para que a opção dos alunos seja respeitada.
>
> Pesquisa exploratória – escolhido o tema a ser pesquisado, encaminham-se os alunos para a procura de materiais e subsídios teóricos dos mais diversos, os quais contenham informações e noções prévias sobre o que se quer desenvolver/pesquisar. A pesquisa pode ser bibliográfica ou contemplar um trabalho de campo, fonte rica de informações e estímulo para a execução da proposta.
>
> Levantamento dos problemas – de posse dos materiais e da pesquisa desenvolvida, incentiva-se os alunos a conjecturarem sobre tudo que pode ter relação com a matemática, elaborando problemas simples ou complexos que permitam vislumbrar a possibilidade de aplicar ou aprender conteúdos matemáticos, isso com a ajuda do professor, que não se isenta do processo, mas se torna o “mediador” das atividades.
>
> Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema – nessa etapa, busca-se responder os problemas levantados com o auxílio do conteúdo matemático, que pode ser abordado de uma maneira extremamente acessível, para, posteriormente, ser sistematizado, fazendo um caminho inverso do usual, pois se ensina o conteúdo para responder às necessidades surgidas na pesquisa e no levantamento dos problemas concomitantemente.
>
> Análise crítica das soluções – etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas também a outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, que, muitas vezes, são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo. É a etapa em que se reflete acerca dos resultados obtidos no processo e como esses podem ensejar a melhoria das decisões e ações, contribuindo dessa maneira, para a formação de cidadãos participativos, que auxiliem na transformação da comunidade em que participam. (Kluber & Burak, 2008)

Observe que os conceitos apresentados enfatizam que a Modelagem Matemática é um processo que vincula a teoria à prática. No âmbito escolar, podemos dizer que aluno e professor, ao utilizá-la, procuram a compreensão da realidade que os cercam buscando transformá-la. Souza e Rosa (2018) realizaram uma pesquisa bibliográfica abordando diferentes concepções sobre Modelagem Matemática, buscando intersecções que pudessem aproximar as temáticas de Modelagem Matemática e Metodologias Ativas de forma a criar um vínculo entre ambas, observando a possibilidade de que a Modelagem Matemática se inscreva como uma Metodologia Ativa.

A Modelagem Matemática é uma metodologia de ensino que ao transformar eventos reais em linguagem Matemática promove significados para o ensino. Sendo o aluno o protagonista neste processo, a Modelagem Matemática possui muitas características que também estão inseridas na proposta das metodologias ativas. Dessa forma, se considerarmos a Modelagem Matemática como uma Metodologia Ativa no ambiente da sala de aula, é possível que seja mais significativa que outras metodologias ativas. Isso foi constatado por Paiva (2016):

> A Modelagem Matemática tem ocupado um papel mais presente no meio das metodologias ativas voltadas para a matemática no Brasil, uma vez que outras metodologias como a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) e a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABProj) não tiveram a mesma repercussão. (Paiva, 2016)

Para fortalecer o que foi constatado por Paiva (2016), Almeida e Tortola (2013) evidenciam as etapas da Modelagem Matemática e Barbosa (2001) destaca os casos em que a Modelagem Matemática se faz presente em ações que refletem alguma metodologia ativa.

As citações que acabamos de fazer corroboram para confirmar a Modelagem Matemática como uma Metodologia Ativa visto que destaca a autonomia do aluno durante uma atividade desenvolvida. Uma fundamentação mais detalhada pode ser encontrada em Souza e Rosa (2018) e Paiva (2016).

A Modelagem Matemática se estabelece enquanto um processo que congrega teoria e prática, fomentando nos seus usuários a busca do entendimento da realidade que o norteia e na procura de estratégias para o agir sobre ela e modificar-se. Dessa maneira, de acordo com Bassanezi (2002), a modelagem procura transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los analisando suas soluções na linguagem do mundo real.

Ainda para Skovsmose (2008) existem diversas maneiras de implementar Modelagem no currículo. Incorporá-la na escola deve significar também o movimento do currículo de matemática para um paradigma de investigações.

Assim, propomos aqui uma sequência didática de Modelagem Matemática levando-se em conta que a mesma pode ser vista como uma Metodologia Ativa. Escolhemos o ensino de funções, em particular, afim, exponencial e de potência para que fosse possível trabalhar com alunos do Ensino Médio de uma escola estadual no município de Sinop no Mato Grosso. Segundo a BNCC para o Ensino Médio, o aluno precisa

> reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento (BRASIL, 2018).

Ainda segundo a Base Nacional Curricular Comum curricular (BRASIL, 2018), o aluno precisa compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, sendo este, um conceito fundamental presente no ensino de matemática do Ensino Médio. Essa compreensão é essencial para que os alunos possam desenvolver habilidades analíticas e resolver uma variedade de problemas relacionados ao mundo real que envolvem relações funcionais.

Para a atividade proposta, apresentamos uma sequência didática, que segundo Zabala (1998), é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (Zabala, 1998). Acreditamos que uma sequência didática pode auxiliar a prática do professor tornando a aula mais colaborativa, objetiva e construtiva.

Assim, preparamos duas sequências didáticas sendo uma para o professor e, neste caso, deve ser desenvolvida em período anterior à aplicação junto aos alunos em sala de aula e desenvolvemos outra para o desenvolvimento das atividades em sala de aula. Para tanto, o tema escolhido foi modelar funções com dados de uma situação real e alinhando-se aos princípios metodológicos da Modelagem Matemática. Para o desenvolvimento das sequências didáticas, se fizeram necessárias algumas etapas, sendo a primeira, a realização da coleta de dados, que ocorreu no portão de entrada e saída dos alunos da escola, cujo objetivo foi investigar o fluxo de saída dos alunos após o término das aulas durante três dias consecutivos, por meio da contagem do número de alunos que atravessavam o portão a cada minuto, levando-se em conta o período em que o portão estava aberto após o término das aulas.

Na segunda etapa, analisamos os dados coletados com o objetivo de identificar modelos matemáticos que possam representar matematicamente o problema a ser modelado. Para isso, usamos o ajuste de curvas e cálculo do coeficiente de determinação R-quadrado em cada modelo escolhido com a finalidade de verificar qual modelo possui um melhor ajuste com resultados mais fidedignos. Já na terceira etapa, ajustamos os modelos aos dados obtidos, enquanto que, a quarta e última etapa se destina a descrever todo o trabalho, proporcionando um relato completo dessa sequência de atividades.

Em nossa pesquisa e estudo o problema central a ser respondido consiste em determinar qual função dentre as funções escolhidas melhor se ajusta aos dados coletados, ou seja, descreve com maior precisão como se dá a variação do fluxo de saída dos alunos em função do tempo.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

2.1. Coleta de dados

A coleta de dados foi realizada no portão de entrada e saída de uma escola estadual no município de Sinop no Mato Grosso. Nossa escolha em relação a escola seguiu dois critérios. O primeiro deles foi em relação ao número de alunos matriculados, pois quanto maior o número de alunos frequentando a escola nos três turnos de aula (manhã, tarde e noite), mais interessante seria nossa coleta de dados devido o alto fluxo de entrada e saída dos alunos passando pelo portão que dá acesso à escola. O segundo critério, consistiu em coletar dados em um ambiente que faz parte do meio em que os alunos estão familiarizados, que faz parte da rotina diária deles, tornando a Modelagem Matemática ainda mais interessante e realística para eles por estar inserida em atividades que executam diariamente.

Inicialmente, solicitamos uma autorização junto a direção da escola para a realização da coleta de dados. Assim, o técnico em informática da escola, que também é responsável pelas gravações das câmeras de segurança da escola, nos forneceu as gravações do portão da escola nos horários de entrada e saída nos três turnos durante três dias consecutivas. Feito isso, em sala de aula, juntamente com os alunos da turma de Ensino Médio que escolhemos para realizar nossa sequência didática, assistimos as imagens gravadas e fizemos a contagem do número de alunos passavam pelo portão de saída a cada minuto após o término do turno de aulas durante oito minutos, repetindo a contagem para ter certeza de que estava correta. Em seguida, elaboramos uma planilha em Excel para iniciar nossa Modelagem. O Quadro 1 apresenta tais informações, considerando-se os períodos matutino, vespertino e noturno.

Após feita a coleta de dados, calculamos a média conforme ilustra o Quadro 2. Todos esses dados e médias serão utilizados nos modelos escolhidos, que em nosso caso, são as funções afim, exponencial e potência.

Quadro 1: Número de alunos que passaram pelo portão de saída da escola a cada minuto durante 8 minutos por três dias.

Tempo em minutos	MATUTINO			VESPERTINO			NOTURNO		
	1º dia	2º dia	3º dia	1º dia	2º dia	3º dia	1º dia	2º dia	3º dia
0-1	186	179	171	243	189	175	173	168	161
1-2	54	35	80	46	66	45	34	34	24
2-3	21	24	36	30	60	21	28	23	15
3-4	8	30	17	21	74	14	39	21	14
4-5	9	7	9	8	25	3	36	23	9
5-6	3	2	5	5	22	12	10	14	10
6-7	6	8	7	6	20	9	11	3	8
7-8	1	3	5	9	19	6	6	5	7

Fonte: própria (2023).

Quadro 2: Média do número de alunos que passaram pelo portão de saída da escola a cada minuto durante 8 minutos por três dias.

Tempo em minutos	MATUTINO	VESPERTINO	NOTURNO
	MÉDIA	MÉDIA	MÉDIA
0-1	178.667	202.333	167.33
1-2	56.333	52.333	30.667
2-3	27	37	22
3-4	18.333	36.333	24.667
4-5	8.333	12	22.667
5-6	3.333	13	11.333
6-7	7	11.667	7.333
7-8	3	11.333	6

Fonte: própria (2023).

2.2. Sobre as funções escolhidas

O conceito de função é amplamente reconhecido como um dos mais fundamentais na Matemática. Ele estabelece uma relação de interdependência entre os elementos de dois conjuntos distintos. Em suma, as funções ocupam uma posição central na Matemática e desempenham um papel importante na representação e compreensão das relações entre variáveis em diversos contextos aplicados e teóricos.

Uma função, de modo geral, configura-se como uma relação peculiar entre duas variáveis, em que cada valor assumido pela primeira variável (conhecida como variável independente) está diretamente associado a um único valor correspondente na segunda variável (variável dependente).

Escolhemos três funções para ajustar aos dados coletados. Como nosso interesse consiste em apresentar uma sequência didática para que o professor possa trabalhar em sala de aula com seus alunos, a escolha das funções está diretamente relacionada com os conteúdos presentes no Ensino Básico. Dessa maneira, os alunos poderão tornar-se mais autônomos e um seu aprendizado já que utilizará a Modelagem Matemática como ferramenta. Assim, as funções a serem utilizadas no processo de modelagem são:

- **Função afim:** Uma função f: ℝ→ℝ é uma função afim quando existem dois números reais a e b tais que satisfaçam a seguinte condição, $\forall x \in \mathbb{R}\ e\ b \neq 0$ temos: $y = f(x) = a\,x + b$;

- **Função potência:** é uma função da forma $f(x) = ax^n$, onde $a, n \neq 0$ são constantes;

- **Função exponencial**: a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ae^{bx}$ com $a, b \neq 0$ é denominada função do tipo exponencial.

A seguir, apresentamos como se deu o ajuste dessas funções aos dados coletados.

2.3. Ajuste de curvas

O ajuste de curvas é um procedimento matemático utilizado para encontrar uma curva que melhor se adapte a um conjunto de dados. Essa curva pode ser uma função matemática simples, como uma linha reta, ou qualquer outra forma que se adapte de forma ótima aos dados disponíveis. O objetivo do ajuste de curvas é encontrar uma matemática científica que descreva de forma precisa e concisa a relação entre as variáveis dos dados observados.

Em uma abordagem matemática formal, podemos dizer que ajuste de curvas consiste em uma técnica que busca relacionar duas variáveis, geralmente uma dependente (y) e uma independente (x), por meio de um modelo matemático do tipo y=f(x). Esse modelo, conhecido como modelo de regressão, é ajustado a um conjunto de dados e pode ser usado para fazer previsões futuras. Qualquer conjunto de pontos com uma tendência regular em um espaço bidimensional pode ser representado por meio de regressão, sendo o método dos mínimos quadrados um dos mais utilizados para determinar os parâmetros da curva que melhor se ajusta aos dados, minimizando a soma dos quadrados dos desvios entre os valores observados e os valores ajustados (Bassanezi, 2015). A soma dos erros ao quadrado é dada por

$$E = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2. \qquad (1)$$

Em outras palavras, queremos que $f(x_i)$ e y_i sejam valores muito próximos, sendo a distância entre eles a menor possível (Ruggiero; Lopes, 1997).

Ainda sobre o ajuste de curvas, apresentamos a medida de ajuste R-quadrado denotado por R^2, visto que é uma importante ferramenta para os nossos resultados.

O coeficiente de determinação R^2, é uma métrica estatística crucial que está intrinsecamente relacionada ao ajuste de curvas. Ele quantifica a proporção da variabilidade presente na variável dependente que é explicada pelo modelo ou pela curva ajustada. O valor de R^2, varia de 0 a 1 (ou de 0% a 100%).

De acordo com Bussab e Morettin (1986), a medida de ajuste R^2 pode ser escrito matematicamente como

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (\bar{y} - y_i)^2} \qquad (2)$$

em que n corresponde ao número (quantidade) de dados coletados, $f(x_i)$ representa os valores dos modelos ajustados em cada instante i. Além disso, y_i corresponde aos dados coletados no instante i e finalmente, $\bar{y}$ representa a média dos dados coletados y_i no instante i.

Observe que, o denominador $D = \sum_{i=1}^{n}(\bar{y} - y_i)^2$ da equação acima, trata-se de uma medida que corresponde ao erro cometido por um modelo que é constante e igual a média dos valores, enquanto que o numerador $N = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2$, representa uma medida do erro total cometido pelo modelo proposto pela função $f(x)$.

Assim, podemos dizer que R^2 representa o percentual da variância que é explicado pelo modelo, visto que D é proporcional à variância dos dados coletados. Isso significa que, quanto mais próximo o R^2 estiver de 1, então menor será o erro cometido pelo modelo em relação à variância dos dados coletados.

Como ilustração para o que acabamos de afirmar, suponha obter $R^2 = 0{,}6$. Isso indica que a medida do erro do modelo é de 40% da medida do erro cometido pelo modelo constante.

Para realizar o ajuste das funções escolhidas, utilizamos os softwares GeoGebra e Excel por serem intuitivos e de fácil utilização com os alunos em sala de aula.

O uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) são muito comuns no processo de ensino de aprendizagem em Matemática nos dias de hoje. Isso se justifica facilmente visto que, para os alunos dos dias atuais, o uso de tecnologias e seus aparatos fazem parte de seu cotidiano. Assim, incorporar no ensino ferramentas como os softwares matemáticos, seja no computador, tablete ou celular, somará ao aprendizado dos alunos de forma desafiadora e ao mesmo tempo em uma linguagem que os próprios alunos já se encontram familiarizados. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) descrevem habilidades e competências na área de Ciências e Matemática destacando a importância das TICs no processo de construção do conhecimento (BRASIL, 2000).

Assim, destacamos o software matemático, em particular o GeoGebra, como uma ferramenta bastante útil que favorece a compreensão dos alunos de determinados conteúdos matemáticos e amplia a absorção de tais conteúdos por meio de visualizações gráficas, tornando o aprendizado que ora era abstrato por meio de cálculos algébricos e aritméticos como algo simples de se entender.

O GeoGebra é um *software* que, além de gratuito é intuitivo podendo ser manipulado facilmente pelos alunos em diferentes níveis escolares. Sua característica principal consiste em combinar geometria, álgebra, gráficos e cálculos em um único ambiente conforme descreve Araújo (2018). Versões atualizadas do GeoGebra, podem ser obtidas pela internet em http://www.geogebra.org/.

Em nossa atividade, usaremos o GeoGebra para ajustar as curvas descritas pelas funções afim, potência e exponencial aos dados coletados que estão presentes nos Quadros 1 e 2.

Entretanto, para chegarmos ao ponto de utilizar o software GeoGebra, iniciamos nossa implementação de dados juntamente com os alunos utilizando o Excel, que trata-se de um software utilizado para elaboração, edição e gerenciamento de planilhas eletrônicas, pois permite a organização dos dados em uma planilha, favorecendo a compreensão dos alunos em organizar os dados de forma concisa, além de podermos usar outras ferramentas presentes no Excel.

Os dados foram cuidadosamente digitados em uma planilha de Excel e, em seguida, inserimos gráficos com linha de tendência. Nesse momento, foi possível observar que, os pontos exibiam um padrão consistente, apresentando uma boa aproximação quando aplicado. Utilizamos os dados do número de alunos que passaram pelo portão de saída da escola a cada minuto durante 8 minutos por três dias e da média do número de alunos que passaram pelo portão de saída da escola a cada minuto durante 8 minutos por três dias, presentes nos Quadros 1 e 2, respectivamente.

3. RESULTADOS

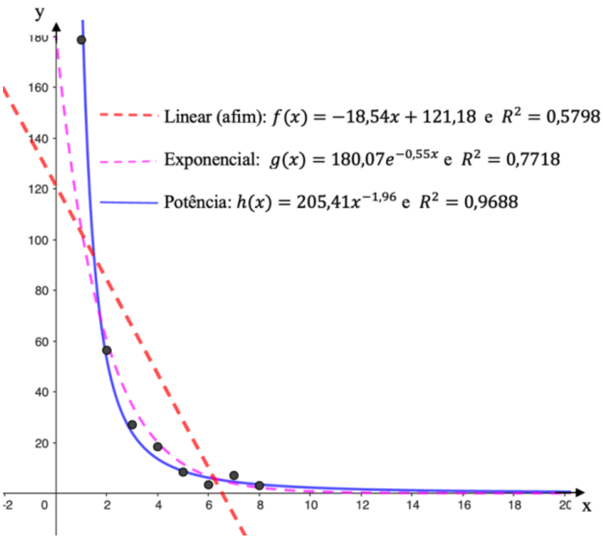
A partir dos dados obtidos, observamos que à medida que o tempo decorre após a abertura do portão, a frequência se aproxima cada vez mais de zero, como mostra o Quadro 1.

Após a análise e comparação do fluxo de saída da escola dos alunos a cada minuto durante 8 minutos nos três dias consecutivos, constatou-se uma semelhança entre eles, ou seja, a presença de um padrão. Dessa forma, pode-se afirmar que a frequência tende a zero com o passar do tempo.

Com base nessas observações e na análise das opções de linha de tendência disponíveis, aplicamos as Funções Afim, Potência e Exponencial como modelo de regressão.

Os Gráficos 1, 2 e 3 representam a média do número de alunos que passaram pelo portão de saída da escola a cada minuto durante 8 minutos por três dias para cada um dos turnos de aula. Em todos os três gráficos inserimos as funções e calculamos o R^2 para verificar qual dentre elas possui um melhor ajuste. O Gráfico 1 ilustra o ajuste das funções afim, potência e exponencial e o cálculo do R^2 para o período matutino. Observe que a função potência teve um melhor ajuste, visto que o R^2 está mais próximo de 1. A segunda função com melhor ajuste foi a função exponencial com $R^2 = 0{,}7718$. E por fim, a função afim, como já esperado, teve o pior ajuste dentre as três.

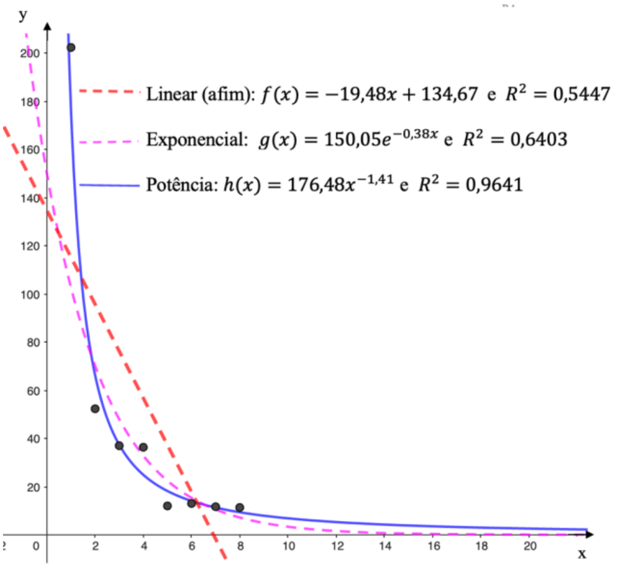
Gráfico 1: Ajuste dos modelos da média do número de alunos que passaram pelo portão de saída da escola a cada minuto durante 8 minutos por três dias no período matutino. Eixo x: tempo em minutos; Eixo y: número de alunos que passaram pelo portão por minuto.



Fonte: própria (2023).

O Gráfico 2 ilustra a mesma situação, porém, para o período vespertino. Observe que novamente, a função potência teve um melhor ajuste, visto que o R^2 está mais próximo de 1.

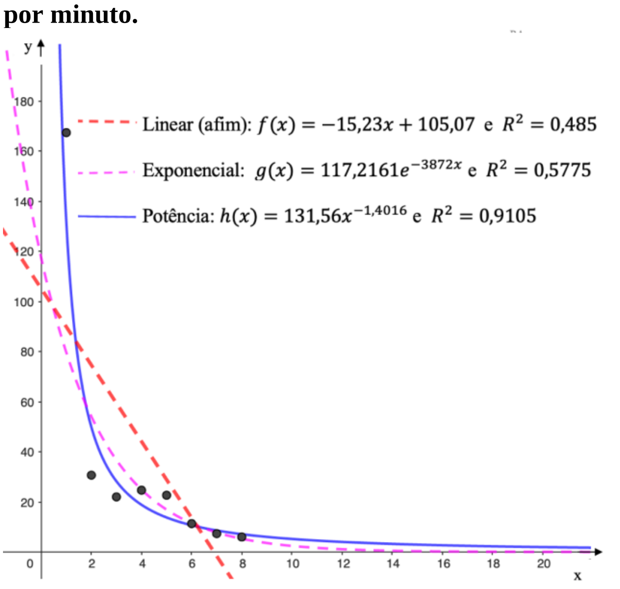
Gráfico 2: Ajuste dos modelos da média do número de alunos que passaram pelo portão de saída da escola a cada minuto durante 8 minutos por três dias no período vespertino. Eixo x: tempo em minutos; Eixo y: número de alunos que passaram pelo portão por minuto.



Fonte: própria (2023).

Para Gráfico 3 que também ilustra a mesma situação, porém para o período noturno, a função potência também teve um melhor ajuste, visto que o R^2 está mais próximo de 1.

Gráfico 3: Ajuste de modelo potência da média do número de alunos que passaram pelo portão de saída da escola a cada minuto durante 8 minutos por três dias no período noturno. Eixo x: tempo em minutos; Eixo y: número de alunos que passaram pelo portão por minuto.



Fonte: própria (2023).

4. DISCUSSÃO

Os modelos encontrados por meio do ajuste de curvas representam uma situação-problema do meio em que vivemos. Afim de compreendermos melhor o fluxo de entrada e saída dos alunos da escola por um determinado período de tempo, os modelos nos ajudam compreender a probabilidade de se ter uma quantidade x de alunos que saem da escola a cada minuto analisado.

Com base nessas considerações e analisando as opções de linha de tendência, das três funções escolhidas como modelo de regressão a Função Potência a qual obtivemos usando o GeoGebra é a que apresenta a melhor aproximação.

Elaboramos duas sequências didáticas, sendo uma delas para o professor e a outra para a execução das atividades propostas em sala de aula.

A sequência didática destinada ao professor, é fundamental para que o professor adquira experiência em trabalhar conteúdos de matemática utilizando Modelagem Matemática. O Quadro 3 ilustra uma sugestão de sequência didática que tem por objetivo preparar o professor para aplicação das atividades propostas.

Quadro 3: Resumo que representa a sequência didática destinada ao professor com o objetivo de aquisição de conhecimento e experiência na execução das atividades propostas.

Parte 1: Atividades da sequência didática para o professor
Objetivo: qualificar o professor para elaboração e aplicação da atividade proposta.
Conteúdos explorados: ajustes de curvas, método dos mínimos quadrados, medidas de ajustes de modelos (R-quadrado), uso de Tecnologias, GeoGebra.
Participantes: professores do Ensino Básico (ativos) e alunos do Ensino Médio (passivos).
Tempo previsto: 5 dias
Metodologia: * Leituras de textos envolvendo Modelagem Matemática; * Elaboração de um projeto envolvendo Modelagem Matemática e ajuste de curvas; * Adquirir conhecimento em como utilizar o *software* matemático GeoGebra para execução das atividades.
Desenvolvimento das atividades e Resultados: * Apresentar para os alunos em sala de aula o projeto (tema de livre escolha do professor) modelando funções matemáticas da escolha do professor aos dados coletados; * Organizar materiais e elaborar uma sequência didática para aplicar atividades junto aos alunos do Ensino Médio.

Fonte: própria (2023).

A seguir, no Quadro 4, apresentamos um esboço de uma sequência didática para ser usada juntamente com os alunos em sala de aula.

Quadro 4: Resumo que representa a sequência didática destinada à aplicação de atividades junto aos alunos do Ensino Médio.

Parte 2: Atividades da sequência didática envolvendo curvas de aprendizagem junto aos alunos do Ensino Médio.
Objetivo: elaborar e aplicar uma atividade envolvendo as funções afim, potência e exponencial para descrever a variação em relação ao tempo do fluxo de saída dos alunos após término do turno de aulas para instigar nos alunos uma aprendizagem mais significativa, fazendo com que o aluno tenha um papel mais participativo e dinâmico.
Conteúdos explorados: funções/modelos matemáticos, ajustes de curvas, método dos mínimos quadrados, medidas de ajustes de modelos (R-quadrado), uso de Tecnologias, GeoGebra e Excel.
Participantes: Estudantes do Ensino Básico (em especial do Ensino Médio) (ativos) e

Professores (orientadores e mediadores)
Tempo previsto: 3 aulas de 2 horas.
Metodologia: * Organização do ambiente de aprendizagem, espaço físico, recursos tecnológicos, trabalho extra-classe, etc.; * Apresentação da atividade proposta; * Coleta de dados; * Modelando funções aos dados coletados; * Discussão dos resultados obtidos e as relações existentes entre funções modeladas aos dados coletados.
Desenvolvimento da atividade e Resultados: *** Aula 1:** na primeira aula de 2 horas, o professor deve apresentar (preferencialmente fazendo uso de ferramentas como por exemplo uma apresentação em power point, internet, e software GeoGebra, projetado com data show por meio de um notebook) os conteúdos teóricos de funções, como tabular dados e plotar gráficos no GeoGebra e/ou Excel; solicitar que os alunos (em grupos) façam a coleta de dados. *** Aula 2:** Com os dados já coletados pelos alunos, além dos conhecimentos prévios sobre funções e GeoGebra, em sala de aula ou em um laboratório de informática na escola, de modo que os alunos tenham acesso a internet e computadores com o GeoGebra instalado (ou sendo utilizado online), o professor pode utilizar as três funções (afim, exponencial e potência) para que sejam modeladas aos dados coletados, fazendo comparações entre as curvas obtidas e discutindo qual seria o melhor resultado obtido. Caso haja tempo, os alunos podem implementar outras funções no GeoGebra, fazendo os ajustes de curvas por meio da regressão e calculando o R-quadrado. Vale ressaltar que as discussões acerca dos resultados envolverão simulações que os alunos farão ao utilizarem os controles deslizantes que representam os parâmetros de cada modelo, buscando o melhor ajuste e melhor R-quadrado.
Aula 3: Discussão sobre os resultados da atividade executada. Trata-se de uma discussão mais aprofundada sobre funções e a importância do uso do GeoGebra, o trabalho em grupo, e demais questões que o professor julgue essencial para despertar nos alunos o interesse pela matemática vinculada a uma situação real, bem como, o uso adequado de tecnologias.

Fonte: própria (2023).

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, tivemos a oportunidade de realizar um processo simples de Modelagem Matemática na prática, atravessando o processo de obtenção de dados, formulação de modelos (nesse caso, representados pelas escolhas de funções) e validação (avaliação de ajustes). Foi constatado que tais atividades poderiam ser facilmente adaptadas para o ensino de Matemática em nível médio e fundamental e uma sugestão de planejamento e sequência didática foram apresentados.

De acordo com a Base Nacional Curricular Comum curricular (BRASIL, 2018), o aluno precisa compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica. Essa compreensão é essencial para que os alunos possam desenvolver habilidades analíticas e resolver uma variedade de problemas do mundo real que envolvem relações funcionais. Em nossa avaliação, as atividades propostas na sequência didática apresentada podem ajudar a desenvolver essas habilidades essenciais.

Finalmente, a primeira autora ressalta que todo o processo de coleta de dados, formulação de modelos e comparação de resultados foram úteis para desenvolver seu senso crítico de investigação científica, contribuindo de forma indireta para a formação dos seus próprios alunos e, assim, enriquecendo sua própria formação.

REFERÊNCIAS

Almeida, L. M. W., Tortola, E. (2013). Reflexões a respeito do uso da modelagem matemática em aulas nos anos iniciais do ensino fundamental. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos (online). Brasília*, v. 94, n. 237, 619-642.

Araújo, C. L. (2018). *Geogebra como recurso facilitador do processo de ensino aprendizagem de Curvas Planas*. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, GO, Brasil.

Barbosa, J. C. (2001) *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico*. In: Reunião Anual da ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais. Rio de Janeiro: ANPED.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* 3ª ed. São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R. C. (2015). *Modelagem matemática: teoria e prática*. Contexto.

Brasil. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília, DF: MEC. Acesso em: 13/09/2023. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf

Bertone, A. M. A.; Bassanezi, R. C.; Jafelice, R. S. M. (2014). *Modelagem Matemática.* Universidade Federal de Uberlândia. Acesso em 18/09/2023. Disponível em:https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25315/1/Modelagem%20Matem%C3%A1tica.pdf

Bussab, W. O.; Morettin, P. A. (1986). *Estatística Básica.* Atual Editora, São Paulo.

Kluber, T. E.; Burak, D. (2008). Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34.

Paiva, T. Y. (2016). *Aprendizagem Ativa e Colaborativa: uma proposta de uso de metodologias ativas no ensino da matemática*. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.

Skovsmose, O. C. (2008). Desafios da reflexão em educação matemática. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. SBEM, *Coleção Perspectivas em Educação Matemática*. Campinas, SP: Papirus.

Souza, J. P. F.; Rosa, C. C. (2018). Reflexões sobre a modelagem matemática como uma metodologia ativa. *VIII EPMEM – Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática*, Cascavel, PR, Brasil. Disponível em:http://sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPMEM/VIII_EPMEM/paper/view/797/403. Acesso em: 20/09/2023.

Zabala, A. (1998). *A Prática Educativa: como educar*. Porto Alegre.

Ruggiero, M. A. G.; Lopes, V. L. d. R. (1997). *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Makron Books do Brasil.