

OS CONTEÚDOS DA APRENDIZAGEM E O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho¹

Resumo - Neste artigo, discuto a relevância do Raciocínio Proporcional a partir da perspectiva dos Conteúdos da Aprendizagem. O objetivo consiste em apresentar o papel do Raciocínio Proporcional, em uma perspectiva que transcende o ensino de regras e técnicas matemáticas academicamente produzidas, para considerar o sentido do que é aprendido em prol do desenvolvimento de habilidades e atitudes que envolvem a formação cidadã, tomando como base os Conteúdos da Aprendizagem e o Raciocínio Proporcional. Nesse contexto, a metodologia é de cunho qualitativo e consiste na análise de uma atividade de Raciocínio Proporcional evidenciando suas potencialidades para uma abordagem que evidencia a formação cidadã da perspectiva dos conteúdos da aprendizagem. Para tanto, o termo Raciocínio Proporcional e sua importância no ensino de Matemática e no cotidiano são enfatizados. Abordo os Conteúdos da Aprendizagem, necessários para a formação de um cidadão, e direciono a discussão para a relação do Raciocínio Proporcional com tais conteúdos, expondo uma atividade em que é possível explorar temas matemáticos que colaboram para a aprendizagem de conteúdos factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais. Concluo que atividades de cunho exploratório, focadas no desenvolvimento do Raciocínio Proporcional, possuem um caráter capaz de influenciar na formação cidadã do indivíduo, afinal, nela são abarcados valores que permitem que as pessoas emitam juízo de equidade relacionado à proporcionalidade.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Anos Finais do Ensino Fundamental. Formação Cidadã. Educação Matemática.

Introdução

Este artigo objetiva apresentar a relevância do papel do Raciocínio Proporcional, em uma perspectiva que transcende o ensino de regras e técnicas matemáticas academicamente produzidas, para considerar o sentido do que é aprendido em prol do desenvolvimento de habilidades e atitudes que envolvem a formação cidadã, tomando como base os Conteúdos da Aprendizagem e o Raciocínio Proporcional.

Para discorrer sobre os Conteúdos da Aprendizagem é essencial expor, inicialmente, que, na perspectiva de Zabala, “Educar quer dizer formar cidadãos e cidadãs, que não estão parcelados em compartimentos estanques, em capacidades isoladas” (ZABALA, 1998, p. 28). Toda pessoa é dotada de múltiplos conceitos e concepções, de modo que ao potencializar

¹ Doutora e Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro/SP. Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal Fluminense (IFF), Campos dos Goytacazes – RJ. Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa (UFV), Viçosa/MG. Endereço: Centro de Ciências Exatas - Departamento de Matemática - Campus Universitário – Viçosa – MG - CEP 36570.000. E-mail: rejane.faria@ufv.br.

algumas capacidades cognitivas, inevitavelmente influencio as demais capacidades, de forma positiva ou negativa. A maneira com que uma pessoa se relaciona com as outras é constituída pelas experiências que ela passou, e nesse sentido, a escola pode ser muito influente, pois é nela que os alunos passam grande parte dos seus dias. Na escola, vínculos e relações são estabelecidos, o que condiciona e define as concepções pessoais sobre si mesmos e sobre as outras pessoas que estão ao redor.

É nesse sentido que Zabala (1998) ressalta que a educação escolar não pode ser restrita ao ensino de conteúdos entendidos como um conjunto de informações sistematizadas e organizadas, relacionadas a uma disciplina específica. É necessário que os conteúdos sejam conectados de modo a possibilitar que capacidades motoras, cognitivas, sociais, afetivas e éticas sejam abrangidas. Por isso, é preciso termos consciência de que “[...] tudo quanto fazemos em aula, por menor que seja, incide em maior ou menor grau, na formação dos nossos alunos” (ZABALA, 1998, p. 29). Nessa perspectiva, “a função social do ensino ultrapassa a transmissão dos conhecimentos socialmente produzidos, para considerar os sentidos e significados do que é aprendido e o desenvolvimento de habilidades e atitudes que envolvem a dimensão do humano” (RAMOS, 2013, p. 114).

Zabala (2008) distribui os conteúdos da aprendizagem em factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais, os quais serão melhores expostos ao longo deste artigo. Contudo, nos é alertado que “o objetivo de compartimentar os tipos de conteúdo é facilitar a compreensão sobre como ocorre o processo da aprendizagem” (DAMASCENO *et al.*, 2016. p. 184), mas adverte que não há fronteiras bem definidas entre os tipos de conteúdo, pois “um conteúdo sempre está associado e será aprendido junto com demais, atualizando, comparando, identificando diferenças e semelhanças, podendo potencializar uma aprendizagem significativa dos conhecimentos apresentados” (DAMASCENO *et al.*, 2016. p. 184).

Os conteúdos da aprendizagem possuem uma preocupação com a formação cidadã, o que perpassa conteúdos atitudinais que estão historicamente atrelados ao senso de equidade. À equidade, por sua vez, estão relacionados temas matemáticos ligados ao Raciocínio Proporcional. Desde as mais remotas civilizações, os homens têm buscado estabelecer relações que os tornem aptos a analisar qualitativamente situações, por meio da distinção de circunstâncias proporcionais das não proporcionais.

Registros históricos revelam que raciocinar proporcionalmente é fundamental não somente para nossa sociedade atual, tampouco para uma região específica do nosso planeta,

mas sim para todas as civilizações ao longo dos tempos (BERNAL, 2004; BOYER, 1996; EVES, 1997). Desde os nossos ancestrais, a proporcionalidade está vinculada ao desenvolvimento humano, tanto na Matemática, quanto na Arte, na Música, na Arquitetura, na Astronomia e em tantas outras áreas de estudo. E da perspectiva de D’Ambrosio (2008), “o que chamamos Matemática é uma resposta à busca de sobrevivência e de transcendência, acumulada e transmitida ao longo de gerações, desde a pré-história” (D’AMBROSIO, 2008, p. 22). E nessa busca de sobreviver e transcender, diversas descobertas matemáticas emergem, como técnicas de contar, calcular e medir, nas quais a proporcionalidade toma parte.

Para sobreviver, o homem desenvolve técnicas e regras de comportamento que lhes permite ter acesso à água, aos alimentos, e a tudo o que é necessário para sobrevivência. Para transcender, desenvolve “[...] meios de explicar fatos e fenômenos, a percepção e o encadeamento do passado, presente e futuro” (D’AMBROSIO, 2008, p. 22). E assim surgiram e continuam a surgir descobertas matemáticas, para as quais estratégias são criadas, organizadas intelectualmente, compartilhadas com o próximo pelos mais diversos meios de comunicação e organizadas socialmente de acordo com a necessidade e interesse dos povos.

A capacidade de raciocinar proporcionalmente nos faz pensar na Matemática como criação humana, como uma ciência em contínua construção, oriunda das necessidades do ser humano e construída por ele em diferentes culturas e em diferentes momentos. Post, Behr e Lesh (1988) ressaltam que muitos aspectos do nosso mundo operam de acordo com as regras proporcionais, o que faz com que a capacidade do Raciocínio Proporcional seja útil na interpretação de fenômenos. É nesse sentido que discuto neste artigo a relevância do Raciocínio Proporcional a partir da perspectiva dos Conteúdos da Aprendizagem.

Nesse contexto, a metodologia é de cunho qualitativo e consiste na análise de uma atividade de Raciocínio Proporcional evidenciando suas potencialidades para uma abordagem que evidencia a formação cidadã da perspectiva dos conteúdos da aprendizagem. Para tanto, discuto a seguir o termo Raciocínio Proporcional e sua importância no ensino de Matemática e no cotidiano. Na seção seguinte, discuto a ideia dos Conteúdos da Aprendizagem, necessários para a formação de um cidadão, bem como a relação do Raciocínio Proporcional com tais conteúdos. Essa relação é evidenciada por meio de uma atividade em que é possível explorar temas matemáticos que colaboram para a aprendizagem de conteúdos factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais. Por fim, as conclusões são explicitadas.

Conteúdos da Aprendizagem

Em Zabala (1998), o termo conteúdo foi utilizado para expressar o que se deve aprender na escola, fazendo referência ao conhecimento de nomes, conceitos, princípios, enunciados e teoremas das disciplinas escolares. Este sentido é estritamente disciplinar. Contudo, na concepção do Faria, é preciso entender a educação como formação integral do cidadão, o que amplia a concepção de conteúdo ao invés de restringi-la à uma única forma de definir as intensões educacionais. Para entender essa ideia:

Devemos nos desprender dessa leitura restrita do termo “conteúdo” e entendê-lo como tudo quanto se tem que aprender para alcançar determinados objetivos que não apenas abrangem as capacidades cognitivas, como também incluem as demais capacidades. Deste modo, os conteúdos de aprendizagem não se reduzem unicamente as contribuições das disciplinas ou matérias tradicionais. (ZABALA, 1998, p. 30).

O entendimento dos Conteúdos da Aprendizagem está atrelado à finalidade da escola, que é promover a formação integral dos alunos, a formação de um cidadão. Por isso, o sentido de conteúdo não pode ser restrito ao aspecto cognitivo.

Devido ao aprofundamento no significado do termo conteúdo, Zabala (1998) nos alerta sobre a necessidade de refletir constantemente sobre o meio em que os alunos estão inseridos e sobre a condição de cidadania que desempenham. Isso porque não podemos pensar apenas na questão “do que ensinar”, refletindo sempre no “por que ensinar”, visto que os Conteúdos da Aprendizagem desempenham a função de abarcar todas as dimensões da pessoa.

Ao atuar como professor, com um enfoque nos Conteúdos da Aprendizagem, é preciso ter ciência de que tais conteúdos são formas para conhecer ou responder questões relativas às experiências dos alunos. Assim, os conteúdos de aprendizagem são divididos em factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais. Os factuais e conceituais fazem referência ao que se deve aprender, os procedimentais se importam com os modos que se deve agir, enquanto que os atitudinais são dedicados a como o cidadão deve ser.

Ao determinar essas terminologias, Zabala (1998) divide os processos de cognição e conduta em compartimentos que permitem analisar em partes o que sempre ocorre de maneira integrada. Isso faz com que todos estes termos correspondam

[...] a diferentes faces do mesmo poliedro. A linha divisória entre umas e outras é muito sutil e confusa. Portanto, seguindo com analogia, a aproximação a uma outra face é uma opção de quem efetua a análise. Num determinado momento queremos

ensinar ou nos deter no aspecto factual, conceitual, procedimental ou atitudinal do trabalho de aprendizagem a ser realizado. (ZABALA, 1998, p. 40).

De forma sucinta, os conteúdos factuais estão relacionados ao conhecimento de fatos, acontecimentos, dados e fenômenos, que não podem ser alterados, e para a aprendizagem desses conteúdos é necessário a memorização. Já os conceituais estão relacionados a conceitos propriamente ditos, e referem-se ao conjunto de fatos, objetivos ou símbolos que possuem características comuns, e que descrevem relações de causa-efeito ou de correlação (ZABALA, 1998).

Tradicionalmente, a sala de aula de matemática centra-se no trabalho com os conteúdos factuais e conceituais, que são importantes para a formação do aluno. Contudo, existem outros conteúdos que são essenciais para a formação do cidadão: os procedimentais e os atitudinais. Como professores, podemos continuar a restringir o ensino de Matemática aos conteúdos factuais e conceituais, “podemos desenvolver a atividade profissional sem nos colocar o sentido profundo das experiências que propomos e podemos nos deixar levar pela inércia ou pela tradição” (ZABALA, 1998, p. 28).

Mas, se quisermos vamos além, “podemos tentar compreender a influência que essas experiências têm e intervir para que sejam o mais benéficas possível para o desenvolvimento e o amadurecimento dos meninos e meninas” (ZABALA, 1998, p.29). Para tanto, devemos incorporar ao ensino de Matemática os conteúdos procedimentais e os atitudinais.

Os procedimentais são aqueles que envolvem ações direcionadas para a realização de um objetivo, referem-se a um aprender a fazer, envolvem regras, técnicas, métodos, estratégias e habilidades. Enquanto que os atitudinais envolvem valores, atitudes que implicam na tomada de posição, envolvimento e reflexão. Para expor de forma mais ampla cada um dos Conteúdos da Aprendizagem, apresento as subseções a seguir.

Conteúdos Factuais

Os conteúdos factuais são aqueles que dizem respeito ao “conhecimento de fatos, acontecimentos, situações, dados e fenômenos concretos e singulares” (ZABALA, 1998, p.41). Como exemplo, posso citar a data do descobrimento de um país, nomes de lugares, de pessoas ou objetos, uma localização, a altura de um monumento, um acontecimento em determinado momento, etc.

É possível identificá-los, pois “sua singularidade e seu caráter, descritivo e concreto, são um traço definidor” (ZABALA, 1998, p. 41). Por possuírem essas características, sua aprendizagem envolve a memorização e repetição. É possível reconhecer que o aluno aprendeu um conteúdo factual quando ele é capaz de reproduzi-lo de forma oral ou escrita quase sempre literal, tal qual ele foi ensinado. Em outras palavras, “dizemos que alguém aprendeu quando é capaz de recordar e expressar, de maneira exata, o original [...] é uma aprendizagem de tudo ou nada” (ZABALA, 1998, p. 41).

Embora o processo fundamental para a aprendizagem dos conteúdos factuais seja repetitivo e mecânico, esse tipo de conteúdo tem sua relevância, pois serve de base para o entendimento de outros tipos de conteúdos. Por isso Zabala (1998) nos alerta que esse conhecimento não deve ser menosprezado, pois é indispensável para compreensão da maior parte das informações e das situações que nos deparamos na vida particular ou profissional. Contudo, é necessário que estes dados, fatos e acontecimentos estejam sempre agregados à conceitos que permitam interpretá-los, pois, sem eles, os conteúdos factuais se reduziriam a conhecimentos automatizados.

Conteúdos Conceituais

Os conteúdos conceituais são relativos aos conceitos e princípios. Os conceitos abarcam de forma conjunta os fatos, objetos ou símbolos que têm propriedades afins. É possível exemplificar conceitos por profundidade, réptil e cubismo. Já os princípios dizem respeito às mudanças produzidas em um fato, objeto ou situação em relação a outros fatos, objetos ou situações de modo correlacionado, como uma situação de causa-efeito. Como exemplos de princípios, temos a Lei de Newton e os axiomas matemáticos. Desse modo, os conteúdos conceituais são mais abstratos do que os conteúdos factuais, pois envolvem a compreensão, a reflexão, a análise e a comparação (ZABALA, 1998).

Não se pode afirmar ter aprendido um conceito ou princípio sem entender o seu significado. Desse modo, é possível identificar que um conteúdo conceitual foi aprendido e foi incorporado aos demais conhecimentos do aluno quando este é capaz de repetir sua definição, mas vai além, pois sabe utilizá-lo para interpretar, compreender ou expor um fenômeno ou situação, além disso, consegue situar os fatos, objetos ou situações concretas no conceito ao qual pertencem.

Para a aprendizagem dos conteúdos conceituais são necessárias atividades complexas, que fomentem um processo de elaboração e construção pessoal do conceito ou princípio. É preciso atividades que valorizem, também, a experimentação, que possibilitem que novos conteúdos de aprendizagem se conectem com os conhecimentos que os alunos já possuem. Para que haja conexões, tais atividades precisam provocar uma forte atividade mental nos alunos, capaz de dotar de significado suas aprendizagens relativas aos novos conceitos e princípios, e que desafiem reais possibilidades. Assim, o aluno que aprendeu os conceitos ou princípios é capaz de interpretá-los, compreendê-los e expô-los.

Enfim, a aprendizagem dos conteúdos conceituais está relacionada às atividades que promovam a compreensão do conceito para que este possa ser acessado na interpretação ou conhecimento de situações ou para construção de outros argumentos.

Conteúdos Procedimentais

Os conteúdos procedimentais “incluem entre outras coisas as regras, as técnicas, os métodos, as destrezas ou habilidades, as estratégias, os procedimentos” (ZABALA, 1998, p. 44). Trata-se de várias ações, que mobilizadas conjuntamente e de forma ordenada, se empenham na realização de um determinado objetivo.

Exemplos de conteúdos procedimentais são: ler, analisar, calcular, qualificar, traduzir, saltar, inferir, etc.

Os eixos aqui expostos têm por objetivo possibilitar que os conteúdos procedimentais sejam agrupados e analisados com maior clareza.

Embora todos os conteúdos procedimentais tenham em comum o fato de que, para serem realizados seja preciso que várias ações sejam praticadas, não se pode negar que cada um deles possui peculiaridades bem diferentes e, portanto, precisam mobilizar ações de naturezas distintas, que implicam em:

- Realizar as ações que compõem os procedimentos. Para tanto, é essencial a aprendizagem, ou seja, é preciso fazer para aprender.

- Exercitar múltiplas vezes. Tal exercício é imprescindível para ter pleno domínio desse tipo de conteúdo. É preciso repetir as ações quantas vezes forem necessárias até que se alcance o domínio.

- Refletir sobre a própria atividade. Isso é fundamental para a tomada de consciência da atuação. Deste modo, não basta repetir um exercício sem mais nem menos. É preciso ser capaz de refletir sobre as formas de realização e sobre as condições reais de uso.

- Aplicar em contextos diferenciados, e mobilizar estes conhecimentos em situações imprevisíveis para que o que foi aprendido seja realmente útil.

Enfim, para a aprendizagem dos conteúdos procedimentais é necessário favorecer a realização de ações, promover a autonomia para que os alunos sejam capazes de analisar diversas situações, propor exercícios que explorem suas habilidades, e promover uma interação entre os conteúdos e os alunos, de modo que estes passam a fazer parte de suas vivências.

Conteúdos Atitudinais

Os conteúdos atitudinais abarcam diversos conteúdos, que podem ser agrupados em valores, atitudes e normas. Os valores são entendidos como “os princípios ou as ideias éticas que permitem as pessoas emitir um juízo sobre as condutas e seu sentido” (ZABALA, 1998, p. 46), por exemplo, a solidariedade, a responsabilidade, e a liberdade. Um valor só pode ser considerado como adquirido, quando ele já foi interiorizado pelo cidadão, e este consegue elaborar critérios para se posicionar diante de uma situação positiva ou negativa. Estes critérios são morais, e devem reger a atuação e a avaliação que a pessoa faz de si mesmo e dos demais.

As atitudes são tendências ou predisposições na forma de atuar das pessoas, em outras palavras, “são a forma como cada pessoa realiza sua conduta de acordo com valores determinados” (ZABALA, 1998, p. 46), por exemplo, cooperar com o grupo, ajudar os colegas e respeitar o meio ambiente. A pessoa aprende a ter certa atitude a partir do ponto em que ela pensa, sente e atua com equidade frente ao objeto concreto ou ao outro indivíduo a quem a atitude está sendo dirigida. Contudo, as atitudes variam de acordo com a necessidade de reflexão. Algumas são intuitivas e, portanto, necessitam de pouca reflexão, enquanto outras são fortemente reflexivas, pois resultam da consciência dos valores que a delineiam.

Já as normas são os padrões e regras de comportamento para vida ideal em sociedade, assim, “as normas constituem a forma pactuada de realizar certos valores compartilhados por uma coletividade e indicam o que pode se fazer e o que não pode se fazer nesse grupo” (ZABALA, 1998, p. 46) são exemplos, respeitar as regras de trânsito, zelar pela integridade

física e moral das pessoas e proteger o meio ambiente. Uma norma é aprendida, em menor grau, quando se trata de uma simples aceitação, a qual não possui a necessidade de entendimento dos motivos para que ela seja cumprida. Em outro grau, intermediário, quando há uma conformidade que implica em refletir sobre o significado da norma, que pode ser voluntária ou forçada. Em último grau, quando as normas são interiorizadas e incorporadas como regra essencial ao funcionamento da coletividade que a rege.

Portanto, os conteúdos atitudinais estão relacionados e configurados por componentes cognitivos, afetivos e condutuais. Cognitivos, pois exigem uma reflexão crítica até atingir sua interiorização. Afetivos, pois mobiliza as emoções e sentimentos da pessoa. Condutuais, pois alteram e reorganizam a forma com que a pessoa se posiciona diante dos obstáculos e das situações do cotidiano. Expostos os quatro tipos de conteúdo da aprendizagem, apresento na seção seguinte a relação destes com o Raciocínio Proporcional.

Raciocínio Proporcional

O Raciocínio Proporcional está relacionado com formas de raciocínio, reações diante de situações proporcionais ou não proporcionais, desenvolvimento e aprimoramento de habilidades e aptidões concernentes à lógica necessária ao raciocínio matemático (BENCHAIM; KERET; ILANY, 2006; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2012; LAMON, 2005; VAN DE WALLE, 2009). Em Faria (2016, p. 49) é explicitado que o Raciocínio Proporcional pode ser entendido como

[...] a capacidade de raciocinar, estabelecendo uma relação entre duas ou mais grandezas em termos relativos, mobilizando para tal raciocínio a habilidade de analisar qualitativamente situações, estabelecer relações, julgar com equidade e distinguir circunstâncias proporcionais das não proporcionais.

Cabe esclarecer que o conceito de Raciocínio Proporcional não é o mesmo de proporcionalidade. Lamon (2005) discute a ideia de que as questões matemáticas que abarcam proporcionalidade podem ser solucionadas com processos resolutivos que envolvem apenas a realização de cálculos que têm por base a expressão $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. O Raciocínio Proporcional vai além. Ele é condição necessária para que argumentos e explicações sejam elaborados diante de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade.

É óbvio que a proporcionalidade se aproxima do Raciocínio Proporcional, principalmente, pelo fato de que para raciocinar proporcionalmente é importante que noções de cálculo proporcional sejam mobilizadas. Contudo, o Raciocínio Proporcional e a proporcionalidade se distanciam devido às relações que estes estabelecem com a noção de interpretação quantitativa e qualitativa. De forma geral, a proporcionalidade envolve dados quantitativos, para os quais resultados puramente numéricos já satisfazem. O Raciocínio Proporcional exige mais, é necessário que interpretações qualitativas emergjam na compreensão de aplicações e contextos baseados na proporcionalidade, sejam na Matemática, em outras ciências ou em situações do cotidiano (LAMON, 2005). Lamon (2005) afirma que o conceito do Raciocínio Proporcional implica em muito mais do que o emprego de algoritmos ou cálculos mecânicos; está ligado à capacidade de pensar, analisar e explorar relações entre quantidades, o que é exposto por meio de comentários, explicações e argumentos sobre as relações proporcionais.

Segundo Van de Walle (2009), a essência do Raciocínio Proporcional é a consideração do número em termos relativos, em vez de termos absolutos. Raciocinar em termos absolutos está relacionado às estruturas aditivas, enquanto raciocinar em termos relativos está relacionado às estruturas multiplicativas, pois considera valores proporcionais. Um exemplo dessa relação entre os termos relativos e absolutos e as estruturas aditivas e multiplicativas pode ser dado ao pensar em quem ganhou mais peso ao final de um ano, uma criança que tinha 5 Kg e passou a ter 8 Kg, ou uma que tinha 3 Kg e passou a ter 6 Kg? Quando um aluno está pensando em termos absolutos, com uma estrutura aditiva, a resposta seria que ambas engordaram 3 Kg, ou seja, a mesma quantidade. Contudo, se um aluno está pensando em termos relativos, com uma estrutura multiplicativa, ele é capaz de observar que a segunda criança dobrou seu peso, enquanto que a primeira teria que estar pesando 10 Kg para ter engordado na mesma proporção do ganho de peso da outra criança, em termos relativos.

O Raciocínio Proporcional envolve relações matemáticas multiplicativas, que envolvem a comparação de medidas de dois valores diferentes, como o peso das duas crianças do exemplo anterior, por meio de palpite seguido de verificação com medição, sucessivas divisões de uma unidade e cálculo de diferenças (HAREL; CONFREY, 1994). Llinares (2003) também destaca essa importância ao afirmar que uma das habilidades necessárias para o Raciocínio Proporcional é a capacidade de analisar termos relativos e absolutos e a relação que possuem com a realização de comparações aditivas ou multiplicativas. O Faria complementa a ideia com

o argumento de que o aluno deve ser capaz de compreender a diferença entre a comparação absoluta, quando se observa o termo absoluto, e a comparação relativa, quando se usa a noção de razão como um índice comparativo entre duas quantidades.

O Raciocínio Proporcional também é necessário para pensar em situações proporcionalmente equivalentes, como perceber que percorrer 80 quilômetros em uma hora, significa que se estava na mesma velocidade de quem percorreu 40 quilômetros em 30 minutos. Conforme Lins e Gimenez (2006), essa situação compara grandezas baseadas em estruturas multiplicativas, por isso trata-se de uma situação proporcional. O Raciocínio Proporcional, nessa e em outras situações proporcionais, implica, também, na compreensão de invariância, em que as relações entre as quantidades ou entre duas grandezas permanecem constantes, ou seja, há uma razão, um valor se mantém proporcional ao outro. Mas também envolvem a percepção de covariância, ou seja, a compreensão de que se duas ou mais grandezas estão relacionadas, elas estão ligadas de forma que uma varia proporcionalmente à outra, variam em conjunto (LAMON, 2005). As sucessões numéricas, que mantêm os padrões estruturais em uma situação proporcional, ajudam os alunos a gerarem tais características. Além disso, a sucessão de números proporcionais permite explicitar duas características das relações estruturais: a estabilidade das razões escalares e a constante de proporcionalidade (LLINARES, 2003).

Durante anos, tem sido demonstrado que o Raciocínio Proporcional é extremamente útil na interpretação dos fenômenos reais, pelo fato de que muitos aspectos de nossas vidas operam sob essa estrutura (FERNÁNDEZ; LLINARES, 2012). Por isso, desenvolver a capacidade de pensar proporcionalmente é fundamental e influencia outras áreas do conhecimento, como nas escalas dos mapas proporcionais à realidade estudada em Geografia; na interpretação do crescimento dos seres vivos, por vezes proporcionais ao tempo de vida, trabalhada nas aulas de Ciências; e na escala musical e nos quadros de Leonardo da Vinci, estudados em Artes. Além das disciplinas escolares, pensar proporcionalmente é fundamental em situações do cotidiano fora da escola, ao calcular as compras, identificar investimentos mais lucrativos, explorar desenhos e mapas, executar medições, converter moedas ou ajustar uma simples receita de bolo ao número de convidados da festa (LESH; POST; BEHR, 1988).

O exemplo dado, sobre a execução da receita de um bolo, remete-me a outra questão que esta tarefa envolve, o tempo de preparo da receita. Trata-se do entendimento da situação: se uma hora é o tempo necessário para o preparo de uma receita de bolo, ao dobrar tal receita,

quanto tempo deve ser destinado ao preparo? O dobro? O fato é que ao dobrar a receita, a quantidade de cada ingrediente é também dobrada, pois se trata de uma operação proporcional, mas o tempo de preparo não, pois embora seja necessário ter mais tempo, isso não significa ser preciso duas vezes mais. Um pouco mais de tempo é necessário, pois a quantidade de ovos a serem quebrados aumenta, assim como dos ingredientes que precisam ser medidos, no entanto, o tempo de cozimento do bolo de receita dobrada é pouco maior que o destinado a uma receita, além de outros detalhes, como o tempo para lavar a louça suja durante o preparo, que também não dobra, afinal sujaria uma vasilha para preparar uma receita ou duas. Por não dobrar o tempo ao dobrar a receita, o tempo de preparo não pode ser considerado proporcional à quantidade de receitas preparadas. Portanto, a ideia de considerar essa situação proporcional deve ser recusada por alguém que raciocina proporcionalmente.

Diversos trabalhos como Post, Behr e Lesh (1988), Lamon (2005) e Van de Walle (2009), afirmam que situações como a descrita acima não são proporcionais, e que distinguir estas situações das proporcionais deve ser natural para quem raciocina proporcionalmente. É nesse sentido que Kastberg, D'Ambrosio e Lynch-Davis (2012) afirmam que o Raciocínio Proporcional é um pilar importante no desenvolvimento matemático das crianças, afinal, a abrangência da capacidade de raciocinar proporcionalmente é essencial para o desenvolvimento de uma pessoa capaz de compreender e aplicar a Matemática.

Os Conteúdos da Aprendizagem e o Raciocínio Proporcional

Os Conteúdos da Aprendizagem são aqueles que, em conjunto, nos alertam ao que se deve ensinar. De forma sucinta, a expressão Conteúdos da Aprendizagem carrega em si o objeto de aprendizagem de uma proposta educacional pautada não apenas naquilo que é preciso memorizar, conhecer ou saber, mas vai além, pois trata de tudo o que deve ser objeto de aprendizagem na escola (ZABALA, 1999).

Por isso, ao adotar os Conteúdos da Aprendizagem em sua prática, o professor é capaz de conceber a organização dos conteúdos e atividades de maneira não segmentada e desconectada da realidade do aluno. Desse modo, os conteúdos aprendidos servem de base para que eles possam observar, analisar, experimentar, intervir e refletir sobre a realidade e os problemas com os quais eles se deparam. Mas o que nos leva a pensar no ensino de Matemática da perspectiva dos conteúdos procedimentais?

Os conteúdos procedimentais na área de matemática, além de favorecerem processos de crescimento pessoal, objetivam dotar os alunos de habilidades que os ajudaram a ser práticos e competentes para interpretar e agir sobre aspectos matemáticos do ambiente, conseguindo que os conhecimentos informais de cada criança se traduzam em ações funcionais e organizadas. (BALLONGA, 1999, p. 165).

Assim, ao abordarmos a Matemática de uma perspectiva que valoriza não apenas os conteúdos factuais e conceituais, mas que também valoriza a desenvoltura com os conteúdos procedimentais e atitudinais, estamos contribuindo para que os nossos alunos se formem cidadãos críticos e reflexivos. Mas, para tanto, Ballonga (1999) destaca que é necessário que os alunos tomem consciência da “prática necessária para conseguir um bom nível de automatização” (BALLONGA, 1999, p. 166), ou seja, do empenho que devem ter na aprendizagem de cada conteúdo, mobilizando para isso diversos procedimentos. Aos professores de Matemática, é alertado que:

Observar, manipular, demonstrar, comprovar, etc., são as bases da aprendizagem da matemática, conseguir que os alunos trabalhem em situações experimentais e com diversos conteúdos os ajudará a progredir na organização, compreensão e generalização dos conhecimentos, e organizará a classe em função de temas de interesse imediato, promovendo uma autêntica atitude matemática. Ajudar os colegas, colaborar e pedir colaboração, participar em grupos de trabalho, compartilhar as descobertas, participar dos jogos matemáticos, estar disposto a comprovar e trocar informação, também são atitudes importantes que se referem diretamente a como se cria e se compartilha conhecimento, ao mesmo tempo em que ajudam a compreender a importância dos acordos universais e da validade das linguagens matemáticas (BALLONGA, 1999, p. 166).

O desenvolvimento e exploração do Raciocínio Proporcional vão ao encontro dessa ideia, pois esta abordagem engloba os Conteúdos da Aprendizagem tratados nesse capítulo, e propõem uma formação do cidadão para a vida. Para ser capaz de raciocinar proporcionalmente, é necessário ter claro os conteúdos factuais que o perpassam, como a memorização dos pré-requisitos para o entendimento desses, as operações com frações e decimais. Sobre os conteúdos conceituais é preciso se debruçar sobre o tema razão e proporção, abrangendo então as peculiaridades que esses conceitos perpassam e abarcando outros, como as grandezas proporcionais, a porcentagem e o teorema de Tales.

Como conteúdo procedimental é preciso relacionar a ideia de razão e proporção com o cotidiano, que vai além do estudo de regras e técnicas e permite que o estudante reconheça situações vantajosas, aplique estratégias e habilidades. Por fim, da perspectiva atitudinal temos que propor atividades em que o estudante seja capaz de pensar com equidade, verificando o que

é mais justo, pensar com uma estrutura aditiva ou multiplicativa, refletindo assim na sua tomada de decisão.

Considero que com uma prática que privilegie os conteúdos de aprendizagem, é possível contribuir para a formação pessoal que abarca conhecimentos factuais e conceituais sim, mas que também colabore para a formação de um cidadão que mobilize conceitos procedimentais e atitudinais, pronto para agir com equidade, que contribua para um bom convívio em sociedade, e que se empenhe para que o meio em que vive seja cada vez melhor.

Para ilustrar essa ideia, apresento na seção seguinte parte de uma atividade que explora o Raciocínio Proporcional, com vistas a explorar os Conteúdos da Aprendizagem.

Um exemplo de atividade

A questão que será aqui exposta é uma das que compõe a atividade “Razão e Proporção” que foi elaborada no âmbito da produção de dados de Faria (2016). Na referida pesquisa, foram desenvolvidas quatro atividades (Razão e Proporção, Grandezas Proporcionais, Teorema de Tales e Porcentagem) que possuem um caráter investigativo, envolvendo conteúdos matemáticos inerentes ao Raciocínio Proporcional, e foram elaboradas com base no que é proposto no currículo do estado de São Paulo de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Tais atividades foram disponibilizadas na íntegra na referida tese e também no GeoGebraBook³.

Além disso, estas atividades foram elaboradas de modo que o software dinâmico de matemática GeoGebra atuasse na integração dos aspectos aritméticos, algébricos e geométricos. As atividades foram discutidas com 17 professores de Matemática que atuam na Educação Básica na rede estadual de São Paulo, no curso de extensão universitária “Raciocínio Proporcional: atividades com o GeoGebra integrando aritmética, geometria e álgebra” (FARIA *et al.*, 2015). Com a finalidade de exemplificar o que discuto neste artigo, apresento este trecho de uma atividade. Trata-se de uma questão que propõe investigar a proporcionalidade em duas situações. A primeira delas (Quadro 1), apresenta uma situação de aumento de igual valor em reais para os dois funcionários que possuem salários diferentes.

³ O GeoGebraBook é uma coleção de materiais e folhas de trabalho baseados no GeoGebra. Ele permite a organização de Applets do GeoGebra e materiais em livros online dinâmicos e interativos para aprendizagem e ensino (Fonte: <https://www.geogebra.org/m/kC3EpQtS>). O GeoGebraBook “Desenvolvendo e Explorando o Raciocínio Proporcional” está disponível em <https://ggbm.at/MHSqp4xU>.

Quadro 1: Situação I da questão 3 da atividade “Razão e Proporção”

3. Vamos investigar a proporcionalidade nas seguintes situações.

-> **Situação I: Uma empresa resolveu dar um aumento de R\$200,00 para os funcionários. O salário de João passou de R\$400,00 para R\$600,00, enquanto o salário de Antônio passou de R\$1 000,00 para R\$1 200,00.**

a. Houve proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários? Justifique sua resposta.

-> Para os itens abaixo, utilize a caixa de entrada em um arquivo novo no GeoGebra, e verifique os resultados que aparecem na janela de álgebra.

b. Quando dividimos o valor do salário final pelo inicial de João, obtemos a razão entre esses valores. Qual é essa razão?

c. Qual é a razão do valor do salário final pelo inicial de Antônio?

d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo salário inicial de Antônio, encontramos outro valor para o salário de Antônio. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor do salário de Antônio com o salário de João?

e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo salário inicial de João, encontramos outro valor para o salário de João. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor do salário de João com o salário de Antônio?

f. Após esses cálculos, você diria que houve ou não proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários?

Observe que ao multiplicar o salário inicial de João por 1,5 (razão encontrada no item b), obtemos o salário final de João. Analogamente, ao multiplicar o salário inicial de Antônio por 1,2 (razão encontrada no item c), obtemos o salário final de Antônio. Então, $\frac{y}{x} = \text{razão}$, onde x representa o salário inicial e y o salário final.

Generalizando... A relação entre os salários final e inicial de alguém que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de João pode ser descrito pela equação da reta $y=1,5x$, $x>0$. Do mesmo modo, o que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de Antônio pode ser descrito pela equação da reta $y=1,2x$, $x>0$.

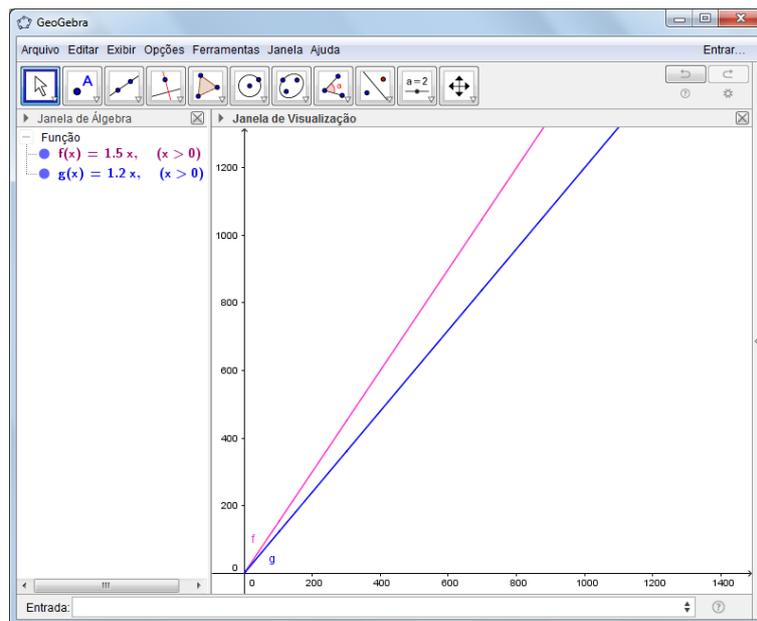
g. Portanto, na caixa de entrada, crie as retas $y=1.5*x$, ($x>0$) e $y=1.2*x$, ($x>0$). Observe os gráficos gerados na janela de visualização e responda: Se você trabalhasse com João e Antônio e seu salário fosse de 800 reais, você iria preferir ganhar um aumento com a taxa concedida ao salário de João ou de Antônio? Justifique.

Fonte: Faria (2016, p. 101)

Primeiramente é questionado se houve proporcionalidade nesse aumento salarial. Espera-se que a resposta do aluno seja dada de forma intuitiva. Nos itens seguintes, a razão do aumento salarial de João e o de Antônio são calculados e, então, é proposto que seja feito o contrário, ou seja, que o salário de Antônio sofra um aumento proporcional ao de João, e o de João sofra um aumento proporcional ao de Antônio. Com base nos cálculos realizados, o aluno é questionado se houve ou não proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários.

Com essa abordagem, é possível generalizar que a relação entre os salários final e inicial de alguém que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de João pode ser descrito pela equação da reta $y = 1,5x$ com $x > 0$. Do mesmo modo, o que tiver a mesma taxa de aumento que foi aplicada ao salário de Antônio pode ser descrito pela equação da reta $y =$

$1,2x$ com $x > 0$. Por fim, tais retas devem ser criadas e os gráficos gerados devem ser observados com o intuito de que o aluno pense na situação de que, se ele trabalhasse com João e Antônio e seu salário inicial fosse de 800 reais, ele iria preferir receber um aumento proporcional a taxa concedida ao salário de João ou de Antônio. Além disso, as retas devem ser analisadas com a finalidade de que o aluno relacione a ideia de proporcionalidade nas perspectivas aritmética e algébrica com a sua representação geométrica (Figura 1).



Fonte: Faria (2016, p. 102)

Figura 1: Tela do GeoGebra com retas representando a relação entre os salários final e inicial de alguém que tiver a mesma taxa de aumento aplicada aos salários de João e de Antônio

Na situação seguinte da mesma questão, outro caso é dado (Quadro 2). Uma empresa concede um desconto de 25% em todos os seus produtos. Diante dessa informação é dito que um computador teve o preço reduzido de R\$ 1000,00 para R\$ 750,00, e que o de uma impressora passou de R\$ 400,00 para R\$ 300,00. Primeiramente é questionado se houve proporcionalidade nesse desconto, e espera-se que a resposta do aluno seja dada de forma intuitiva. Nos itens seguintes, a razão do desconto dado à impressora e ao computador é calculada e, então é proposto que seja feito o contrário, ou seja, que a razão do desconto dado à impressora seja dado ao computador e vice versa. Após esses cálculos o aluno é convidado a se posicionar afirmando se houve ou não proporcionalidade no desconto dado nos dois produtos. Com essa abordagem, é possível generalizar que a relação entre os preços final e

inicial de um produto que tiver a mesma taxa de desconto que foi concedida ao computador e à impressora, pode ser descrito pela equação da reta $y = 0,75x$ com $x > 0$.

Quadro 2: Situação II da questão 3 da atividade “Razão e Proporção”

-> **Situação II:** Uma empresa de informática resolveu dar um desconto de 25% no preço de toda a sua linha de produtos. O preço de um computador passou de R\$1000,00 para R\$750,00, e o de uma impressora passou de R\$400,00 para R\$300,00.

a. Houve proporcionalidade no desconto dado nos dois produtos? Justifique sua resposta.

-> Para os itens abaixo, utilize a caixa de entrada em um arquivo novo no GeoGebra, e verifique os resultados que aparecem na janela de álgebra.

b. Quando dividimos o valor final pelo inicial do computador, obtemos a razão entre esses valores. Qual é essa razão?

c. Qual é a razão do valor final pelo inicial da impressora?

d. Ao multiplicar a razão encontrada no item b pelo valor inicial da impressora, encontramos um valor com desconto para a impressora. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor final da impressora e do valor final do computador?

e. Se pensarmos o contrário, ou seja, multiplicar a razão encontrada no item c pelo valor inicial do computador, encontramos um valor com desconto para o computador. Qual é esse valor? Qual é a relação deste valor final do computador e do valor final da impressora?

f. Após esses cálculos, você diria que houve ou não proporcionalidade no desconto dado nos dois produtos?

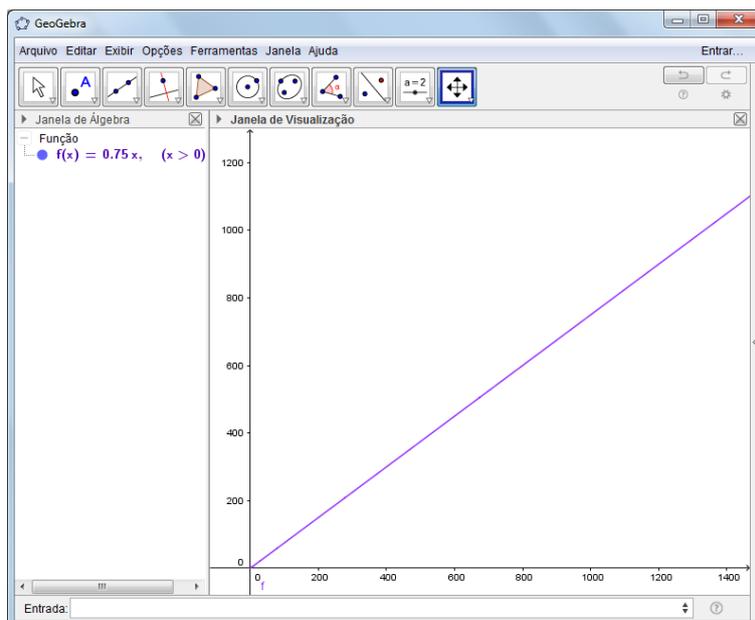
Observe que ao multiplicar o preço inicial do computador por 0,75 (razão encontrada no item b), obtemos o preço final do computador. Analogamente, ao multiplicar o preço inicial da impressora por 0,75 (razão encontrada no item c), obtemos o preço final da impressora. Então, $\frac{y}{x} = \text{razão}$, onde x representa o preço inicial e y o final.

Generalizando... A relação entre os preços final e inicial de um produto que tiver a mesma taxa de desconto que foi concedida ao computador e à impressora, pode ser descrito pela equação da reta $y=0,75x$, $x>0$.

g. Portanto, na caixa de entrada, crie a reta $y=0.75*x$, ($x>0$). Observe o gráfico gerado na janela de visualização e responda: Se você comprasse uma câmera digital nessa loja, que antes custava 100 reais e que agora está com a mesma taxa de desconto concedida ao computador e à impressora, quanto você pagaria? Justifique.

Fonte: Faria (2016, p. 104)

Por fim, tal reta deve ser criada e o gráfico gerado deve ser observado com o intuito de que o aluno pense na situação de que, se ele comprasse uma câmera digital nessa loja, que antes custava 100 reais e que agora está com a mesma taxa de desconto concedida ao computador e à impressora, quanto ele pagaria, com a finalidade de que o aluno relacione a ideia de proporcionalidade nas perspectivas aritmética e algébrica com a sua representação geométrica (Figura 2).



Fonte: Faria (2016, p. 105)

Figura 2: Tela do GeoGebra com reta representando a relação entre os preços final e inicial de um produto que tiver a mesma taxa de desconto aplicada ao computador e à impressora

Para a realização dessa questão, é preciso retomar alguns conteúdos factuais ligados à Razão e Proporção na Matemática, como a multiplicação, a divisão e a noção de igualdade. Também é necessário entender o significado de alguns conceitos e saber utilizá-los para interpretar, compreender e expor essa aprendizagem por meio da realização dos demais itens. Para a aprendizagem desses conteúdos conceituais, foram criadas questões que fomentassem um processo de elaboração e construção pessoal do conceito, valorizando a experimentação, e favorecendo a conexão de novos conteúdos de aprendizagem com os que os alunos já possuem (ZABALA, 1998).

Mas as atividades também são de natureza procedimental, pois favorecem a realização de ações como calcular descontos, e promovem a autonomia para que os alunos sejam capazes de analisar diversos casos, como pensar em situações vantajosas. Essas questões também contribuem para que os alunos explorem suas habilidades, de modo que os conteúdos tenham relação com suas vivências, o que engloba a reflexão sobre as situações propostas, e fomenta a tomada de consciência em uma atuação. Assim, não basta calcular apenas, é preciso refletir sobre as variáveis que a tomada de decisão implica, e suas respectivas consequências (ZABALA, 1998).

Por fim, afirmo que esta questão tem caráter atitudinal, afinal, nela são abarcados valores que permitem às pessoas reconhecer vantagens e emitir juízo de equidade, ligado à

proporcionalidade. Além disso, devido à nela ser explorado o Raciocínio Proporcional, ela explora alguns valores que interferem na forma de conduta do cidadão (ZABALA, 1998).

Mas destaco que este é apenas um exemplo que apresenta uma questão das oito que compõem a atividade “Razão e Proporção”. Além dessa atividade, outras três foram produzidas como já citado. Saliento que para desenvolver no aluno uma postura crítica que contribua para sua formação cidadã, pautada nos Conteúdos da Aprendizagem, as atividades de cunho investigativo, atuantes no campo factual, conceitual, procedimental e atitudinal precisam ser constantes no contexto escolar. Deste modo, essa seção teve o intuito de apresentar um exemplo, uma possibilidade de exploração de um tema específico, o Raciocínio Proporcional, da perspectiva dos Conteúdos da Aprendizagem, não sendo nosso intuito esgotar o tema. Na seção seguinte finalizo o artigo tecendo algumas considerações.

Considerações Finais

Neste artigo foi exposto um diálogo com Fariaes que tratam do Raciocínio Proporcional. Discuto que alguém capaz de raciocinar proporcionalmente não é aquele que é apenas capaz de aplicar algoritmos, e que para se tornar hábil diante de situações proporcionais é necessário conhecer as características matemáticas de situações proporcionais, o que implica na capacidade de distinguir situações proporcionais e não proporcionais. Para tanto é preciso ter a aptidão de articular métodos matemáticos, formais ou não, na resolução de tarefas proporcionais (CRAMER; POST, 1993).

Van de Walle (2009) sugere que independentemente de como está expresso no currículo de matemática local, as séries compreendidas do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental devem estar centradas no desenvolvimento do Raciocínio Proporcional. Por este motivo o Faria alerta aos professores sobre a necessidade de ter clareza do que constitui razão e proporção e o contexto em que tais conteúdos emergem.

Diante do exposto neste artigo, defendo que o Raciocínio Proporcional merece mais atenção no contexto escolar e na Educação Matemática. Além disso, reitero que o fato de os professores terem dificuldade de lidar com as dúvidas dos alunos no que tange ao desenvolvimento do Raciocínio Proporcional (PAULA, 2012) reforça a atenção necessária que pesquisadores e professores precisam dar a esse tema.

Por fim, aponto os Conteúdos da Aprendizagem como uma possibilidade de valorização do Raciocínio Proporcional para formação cidadã do indivíduo. Para exemplificar essa ideia, apresento trecho de uma atividade que aborda os Conteúdos da Aprendizagem, ao propor situações que relacionam a proporcionalidade com situações vantajosas e de equidade.

THE CONTENTS OF LEARNING AND THE PROPORTIONAL REASONING

Abstract: In this article, we discuss the relevance of Proportional Reasoning from the perspective of the Contents of Learning. The objective is to present the role of Proportional Reasoning, in a perspective that transcends the teaching of academically produced rules and mathematical techniques, to consider the meaning of what is learned in favor of the development of skills and attitudes that involve the citizen formation, taking as based on the Contents of Learning and Proportional Reasoning. In this context, the methodology is qualitative and consists of the analysis of a Proportional Reasoning activity evidencing its potentialities for an approach that evidences the citizen formation from the perspective of the contents of the learning. For this, the term Proportional Reasoning and its importance in Mathematics teaching and in everyday life are emphasized. We approach the contents of learning, necessary for the formation of a citizen, and direct the discussion to the relation of Proportional Reasoning with such contents, exposing an activity in which it is possible to explore mathematical subjects that collaborate for the learning of factual, conceptual, procedural and attitudinal contents. We conclude that exploratory activities, focused on the development of Proportional Reasoning, have a character capable of influencing the citizen's formation of the individual, after all, it encompasses values that allow people to pass judgment on equity related to proportionality.

Keywords: Mathematics Teaching. Last Years of the Basic Education. Citizen Formation. Mathematics Education.

Referências

FARIA. **Raciocínio Proporcional:** Integrando Aritmética, Geometria e Álgebra com o GeoGebra. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, 2016.

FARIAES. In: 8º Congresso de Extensão da Unesp “Diálogos da Extensão: Do Saber Acadêmico à Prática Social”, 2015, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: 2015.

BALLONGA, P. P. Matemática. In: ZABALA, A. (Org.). **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em sala aula.** Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: ARTMED, 1999.

BEN-CHAIM, D.; KERET, Y.; ILANY, B. **Ratio and Proportion: Research and Teaching in Mathematics Teacher Training**. Mofet and Ach Publication, 2006.

BERNAL, M. M. **Estudo do objeto proporção: Elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado**. 2004. Mestrado em Educação Científica e Tecnológica – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

CRAMER, K.; POST, T. Connecting Research To Teaching Proportional Reasoning. **Mathematics Teacher**, n. 86(5), p. 404–407, 1993.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.

DAMASCENO, N. F. P.; MÜLLER, N.; SALES, A.; SALES, C. M.; REIS, C. B. Conteúdos de Aprendizagem presentes em um material educativo impresso sobre combate à Dengue. In: **Interfaces da Educação**. Paranaíba, v.7, n.20, p.178-194, 2016.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S. Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)**, v. 15, p. 277–310, 2012.

HAREL, G.; CONFREY, J. **The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics**. Albany, NY: State University of New York: SUNY Press, 1994.

KASTBERG, S.; D'AMBROSIO, B.; LYNCH-DAVIS, K. Understanding proportional reasoning for teaching. In: **Australian Mathematics Teacher**, 3, 2012, [S.l.: s.n.], 2012.

LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 2. ed. Mahwah, NJ: Erlbaum, 2005.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Org.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, A: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93–118.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 7. ed. Campinas: Papyrus, 2006.

LLINARES, S. Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. In: CHAMORRO, C. (Org.). **Didáctica de las Matemáticas**. [S.l.]: Pearson-Prentice Hall, 2003. p. 187–220.

PAULA, M. R. **Razão como taxa:** Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática. 2012. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - Minas Gerais, 2012.

POST, T.; BEHR, M. J.; LESH, R. Proportionality and the development of prealgebra understanding. In: COXFORD, A.; SCHUTE, (Org.). **The Ideas of Algebra, K-12 - Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics**. Reston, VA: The Council, 1988. p. 78–90.

RAMOS, D. K. A Aprendizagem Colaborativa e a Educação Problematizadora para um Enfoque Globalizador. In: **Cadernos da Pedagogia**. São Carlos, Ano 6. v. 6 n. 12, p. 105-115, jan-jun. 2013.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre (RS): ARTMED, 2009.

ZABALA, A. (Org.). **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em aula. Tradução E. Rosa**. Porto Alegre (RS): Editora Artes Médicas Sul Ltda., 1999.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Tradução E. Rosa. Porto Alegre (RS): Editora Artes Médicas Sul Ltda., 1998.

Recebido em: 10 de maio de 2019

Aprovado em: 24 de junho de 2019