REP's - Revista Even. Pedagóg.
úmero Regular: Matemática e suas interfaces com o ensino
Sinop, v. 13, n. 2 (33. ed.), p. 357-381, jun./jul. 2022
ISSN 2236-3165
https://periodicos.unemat.br/index.php/reps/index
DOI: 10.30681/2236-3165

APREENSÕES, OLHARES E DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL NO PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE PROVAS EMPIRÍCAS E TEÓRICAS[1]

APPREHENSIONS, LOOKS AND DIMENSIONAL DECONSTRUCTION IN THE PROCESS OF BUILDING EMPIRICAL AND THEORETICAL PROOFS

Eberson Paulo Trevisan

RESUMO

Apresentamos aqui os resultados de uma pesquisa realizada com um grupo de professores de matemática, que teve como objetivo analisar a articulação das diferentes apreensões, olhares e a desconstrução dimensional no processo de construção de provas empíricas e teóricas no trabalho com proposições geométricas. Essa articulação se torna importante, para o ensino e a aprendizagem da geometria, ao ser caracterizada como elemento essencial para aprendizagem na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Para tanto, adotamos elementos da engenharia didática como metodologia de pesquisa. Como resultado, observamos, por parte dos professores envolvidos, um forte apelo à utilização da apreensão perceptiva e a necessidade de valorização do desenvolvimento do olhar inventor, bem como a necessidade de favorecer o transitar entre as diferentes dimensões nas construções.

Palavras-chave: Ensino de geometria. Provas empíricas e teóricas. Apreensões, olhares e desconstrução dimensional. Professores de Matemática.

[1]Este artigo é um recorte da Tese de Doutorado intitulada: Um estudo sobre a articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de geometria com professores da rede pública, sob a orientação do Dr. José Luiz Magalhães de Freitas (UFMS), Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC).

ABSTRACT

We present here the results of a research carried out with a group of mathematics teachers, which aimed to analyze the articulation of different apprehensions, looks and dimensional deconstruction in the process of constructing empirical and theoretical proofs in the work with geometric propositions. This articulation becomes important for the teaching and learning of geometry, as it is characterized as an essential element for learning in Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Records. We adopted elements of didactic engineering as research methodology. As a result, we observed, on the part of the teachers involved, a strong appeal to the use of perceptive apprehension and the need to value the development of the inventor's gaze, as well as the need to favor the transition between the different dimensions in the constructions.

Keywords: Geometry teaching. Empirical and theoretical proof. Apprehensions, looks and dimensional deconstruction. Mathematics Teachers

Correspondência:
Eberson Paulo Trevisan. Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC/UFMT). Professor da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais (ICNHS) e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM). Membro do Grupo de Estudos em Ciências Naturais e Matemática (GECINMAT). Sinop, Mato Grosso, Brasil.
E-mail: eberson.trevisan@ufmt.br

Recebido em: 29 de outubro de 2021.
Aprovado em: 7 de junho de 2022.
Link/DOI: https://periodicos.unemat.br/index.php/reps/article/view/6367/4635

1 INTRODUÇÃO

No presente artigo, buscamos apresentar uma investigação realizada com um grupo de professores que ensinam matemática na rede pública do município de Sinop/MT, em que analisamos o papel da articulação entre as diferentes apreensões, olhares e a desconstrução dimensional das formas no processo de aprendizagem da geometria, no tocante à produção de duas categorias de provas, a saber, empíricas e teóricas, elaboradas por esse grupo de professores.

Neste artigo, entendemos como provas empíricas uma argumentação que se utiliza de procedimentos de experimentação, ou seja, que vise a constatação da verdade de uma dada propriedade e que se sustente no manuseio de materiais manipuláveis, na construção e na comparação de esquemas gráficos ou, ainda, na manipulação de figuras, seja em ambiente computacional ou através do uso de lápis e papel. Já como provas teóricas, assumimos as argumentações que buscam a constatação da verdade de uma proposição por meio de elementos teóricos matemáticos, ou seja, pautada em conceitos, definições, proposições e teoremas.

Para a produção e análise dos dados, procuramos uma aproximação metodológica com a Engenharia Didática descrita por Artigue (1996). Assim, elaboramos um curso de extensão que foi oferecido aos professores de matemática. Nesse curso, foi aplicado um conjunto de atividades previamente selecionadas, que buscavam explorar propriedades geométricas, especialmente propriedades que poderiam ser deduzidas via aplicação dos casos de congruência de triângulos. A partir dessas atividades, o grupo de professores era convidado a construir propostas de trabalho para explorar a produção de provas empíricas e teóricas no contexto de sala de aula. As propostas entregues, bem como as gravações em áudio e vídeo, configuraram o material de análise.

Na produção de provas apresentadas pelos professores, nas duas categorias analisadas, identificamos haver um forte apelo à utilização da apreensão perceptiva para sustentar as argumentações, o que distancia a prática do necessário, que seria a articulação das diferentes apreensões em geométrica, abordadas por Duval (2011), e o favorecimento do emprego do olhar inventor, apresentado por Duval (2005).

Dessa forma, expomos, na seção 2 deste estudo, uma revisão teórica acerca da importância e do papel das figuras no processo de ensino e aprendizagem da geometria, dando destaque as apreensões, olhares e a desconstrução dimensional. Para tal, temos como alicerce os estudos e publicações de Raymond Duval sobre essa temática. Em seguida, na seção 3, apresentamos a metodologia de produção dos dados da pesquisa e a análise realizada a partir deles. Por fim, apresentamos as conclusões do trabalho na seção 4.

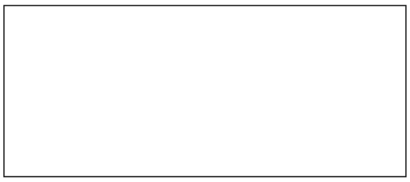
2 FIGURAS GEOMÉTRICAS: diferentes apreensões, olhares e a desconstrução dimensional

É inegável o papel de destaque que desempenham as figuras no processo de aprendizagem relacionado à geometria. Frente a isso, buscamos aqui lançar um olhar sobre as particularidades das figuras, especialmente do ponto de vista cognitivo, relacionadas à aprendizagem geométrica. A esse respeito, Duval (2012) apresenta um modelo que discute quatro modos de apreensão, em geometria, relacionados ao trabalho com as figuras e segundo o papel que elas representam frente à atividade matemática, a saber: a apreensão sequencial, a apreensão perceptiva, a apreensão discursiva e a apreensão operatória.

A apreensão sequencial faz menção à atividade requerida na construção de figuras, seguindo orientações, ou na descrição de figuras, observando que o objetivo nada mais é que a reprodução da figura.

A apreensão perceptiva é caracterizada pela identificação simples oferecida pelo contorno das figuras, desse modo, “quando diferentes traços formam um contorno simples e fechado, eles se destacam como uma figura” (DUVAL, 2012, p. 121). Para exemplificar o que o autor diz, vejamos a Figura 1 a seguir:

Figura 1 - Representação suporte para ilustrar a apreensão perceptiva.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um aluno, ou uma pessoa, poderia ver a figura acima como um muro de uma casa, uma parede, a tampa de uma mesa, o contorno de um terreno, uma figura geométrica, a saber, paralelogramo ou um retângulo, ou seja, em um processo intuitivo, cada uma das formas de ver a figura corresponde a uma apreensão perceptiva sobre ela. Podemos assim dizer que a apreensão perceptiva tem relação com a interpretação geométrica imediata e automática adotada frente à uma figura especialmente relacionada ao seu formato, contorno, posição, cor, entre outras características.

A apreensão discursiva caracteriza-se pela compreensão sobre a figura advinda dos enunciados de exercícios, teoremas, proposições, hipóteses, etc., ou seja, é a associação que se faz da figura com esses elementos matemáticos que geram a chamada apreensão discursiva. Como Duval (2012, p. 135) nos coloca, “a apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável”.

Para Torregrossa e Quesada (2007), pode haver dois sentidos para essa associação entre a figura e o discurso, do visual para o discursivo ou do discursivo para o visual. Assim, frente à figura de um triângulo, digamos ABC, podemos associar o discurso: “ABC é um triângulo retângulo” ou, ao contrário, frente a um enunciado do tipo “ABC é um triângulo retângulo”, é comum representarmos com a figura do triângulo. Ambos envolvem apreensões discursivas.

A chamada apreensão operatória é caracterizada por ser “uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações, para cada tipo de modificação são diversas as operações possíveis” (DUVAL, 2012, p. 125).

Além do já exposto sobre as apreensões, é necessário destacar também que Duval discute a questão da complexidade dos processos envolvidos na forma de “ver” em geometria. Para o autor, a forma de ver no ensino e na aprendizagem em geometria torna-se especial, tomando lugar de destaque, pois “a visualização não é tão somente independente dos conceitos, como é a condição cognitiva requerida a sua aquisição” (DUVAL, 2014, p. 34).

A forma como vemos as figuras é separada por tal autor em duas categorias: visualização icônica e visualização não icônica. A visualização icônica “repousa sobre uma similaridade entre a forma reconhecida em um traço e a forma característica do objeto identificado” (DUVAL 2005, p. 09), ou seja, são as classes de figuras que fazem menção a objetos reais, cujas formas e contornos podem nos levar a associá-los a objetos da realidade. Como Duval (2011, p. 85) destaca, “uma configuração parece com um objeto da realidade à medida que as relações de vizinhança entre as formas que reconhecemos conservam as relações entre as partes desse objeto".

O fato é que essa maneira com que olhamos as figuras, baseada no modelo icônico, pode parecer natural, porém não condiz com a forma necessária de se ver imposta no trabalho geométrico. Para esclarecer esse fato, é importante ressaltar a seguinte observação feita por Duval (2011, p. 86):

> [...] as figuras geométricas se distinguem de todas as outras formas visuais pelo fato de que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclui a possibilidade de reconhecer outras. Em outras palavras, para ver matematicamente uma figura ou um desenho, é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja mudada.

Mudar esse olhar sem alterar a representação apresentada remete ao segundo modo de ver, chamado pelo autor de visualização não icônica ou desconstrução das formas (DUVAL, 2005). O ver em geometria, no trabalho de ensino e aprendizagem desse ramo da matemática, necessita sempre transpor esse ver icônico.

Perpassando por esses dois modos de olhar, o icônico e o não icônico, Duval (2005) descreve quatro formas de olhar em geometria: o olhar botanista, o olhar agrimensor, o olhar construtor e o olhar inventor, os quais, brevemente, comentamos a seguir.

O olhar botanista é aquele olhar que permite reconhecer as formas a partir das qualidades visuais, ou seja, é um tipo de olhar qualitativo, que permite diferenciar um quadrilátero de um triângulo ou de um círculo. Nesse olhar, entra em jogo também o reconhecimento de certas semelhanças, como de um retângulo e de um quadrado, "aqui, as propriedades distinguidas são características visuais de contorno" (DUVAL, 2005, p. 5), o que sugere que essa forma de olhar favorece a apreensão perceptiva anteriormente definida.

O olhar agrimensor se apresenta como a possibilidade do estabelecimento de medidas sobre um terreno, ou chão, sobre a distância entre dois marcos e a consequente passagem desses dados para o papel; temos, assim, a necessidade de relacionar duas escalas de grandeza (DUVAL, 2005).

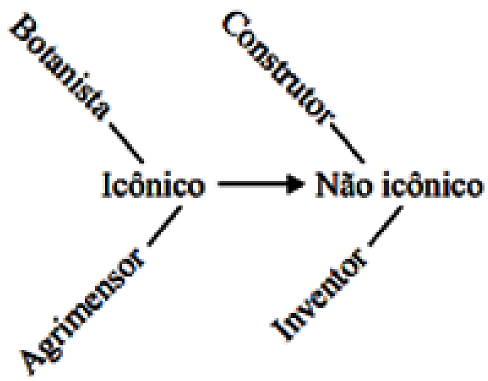
No olhar construtor, a geometria se articula através das realizações de medidas, da utilização de instrumentos adequados, como réguas e compassos. O importante é que, segundo Duval (2005, p. 06), “é através da utilização de um instrumento que os alunos podem verdadeiramente tomar consciência que as propriedades geométricas não são apenas de características perspectivas”.

Por último, o olhar do inventor. Neste, um dado problema é resolvido ao se adicionar elementos não existentes na figura inicial, dessa maneira, a figura é modificada visando encontrar um procedimento de resolução para o problema. Duval (2005, p. 07) destaca que essa forma de ver exige “uma DESCONSTRUÇÃO VISUAL das formas perceptíveis elementares que se impõem à primeira vista” (grifo do autor).

É relevante destacar que esses olhares em geometria se articulam com as apreensões anteriormente destacadas, como nos coloca Moretti (2013, p. 294): “esses olhares caminham de um lado ao outro conforme as apreensões em Geometria são exigidas. No olhar do botanista, essencialmente é a apreensão perspectiva que é exigida. Na outra ponta, todas as apreensões participam das atividades do olhar do inventor”.

É necessário perceber que esses olhares se articulam em função da visão icônica e não icônica. Moretti (2013) apresenta um esquema para ilustrar essa articulação, aqui representado na Figura 2.

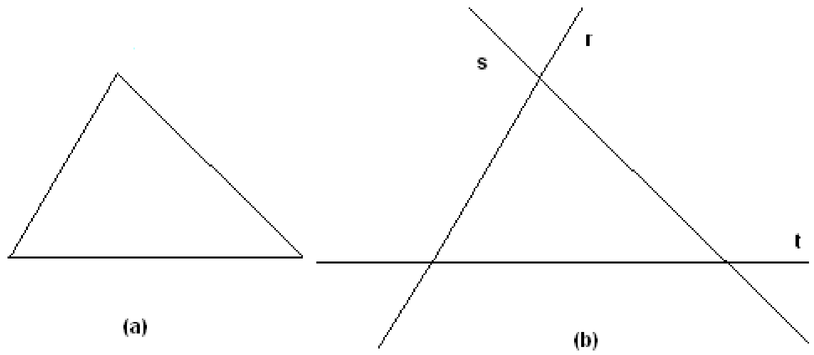
Figura 2 - As maneiras de olhar uma figura em relação às visualizações icônica e não icônica.



Fonte: Moretti (2013, p. 293).

Postos estes elementos, necessitamos destacar que, em nossa interpretação, o modo de ver icônico também se impõe quando vemos uma figura geométrica simples e nos limitamos ao seu reconhecimento por comparação a outros elementos figurais previamente conhecidos, ou seja, empregamos um olhar botanista. Operamos iconicamente, mesmo em um contexto matemático, quando somos levados a ver uma figura, como a Figura 3 (a), e a reconhecemos apenas como sendo um triângulo (prevalece a apreensão perceptiva e o olhar botanista), e não as outras possibilidades que ela impõe, como na Figura 3 (b), sendo a intersecção de três retas não paralelas entre si (necessita de uma apreensão operatória para tal visualização, além do olhar inventor: prolongar os lados, modificar a figura).

Figura 3 - Um exemplo do que vemos com um olhar icônico sobre uma figura geométrica, no caso um triângulo, e o que poderíamos ver, no caso um conjunto de retas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Normalmente, não basta simplesmente reconhecer a figura que se apresenta, mesmo sendo essa uma figura geométrica, como a representação de um ponto, uma reta, um polígono, uma representação tridimensional. É necessário operar uma desconstrução dimensional, como Duval alerta:

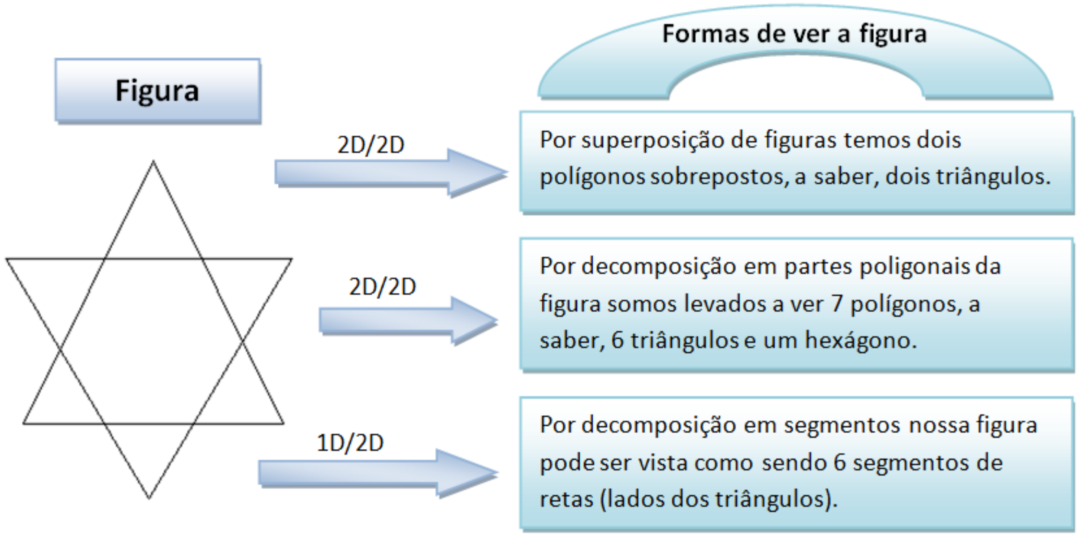
> [...] ver <<geometricamente>> uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel (DUVAL, 2011, p. 87, grifo do autor da obra).

A desconstrução, sempre possível de se operar nas figuras geométricas, gera essas várias maneiras de reconhecer ou “ver” as formas geométricas destacadas pelo autor e essenciais para o ensino e aprendizagem da geometria.

Essa desconstrução dimensional, de um ponto de vista teórico, baseia-se no espaço dimensional utilizado ou ocupado pelos elementos figurais que comumente representamos. A saber, os elementos figurais, como cubos, esferas e pirâmides, são tidos como elementos 3D; todos os polígonos e círculos, como elementos 2D; as retas, as curvas e os segmentos de retas, como elementos 1D; e os pontos, como elementos 0D.

No entanto, para Duval (2005, 2011), é necessário observar também as representações feitas dessas unidades, marcando a relação nD/mD, em que nD representa o espaço real ocupado pelo elemento figural, as dimensões descritas no parágrafo anterior, enquanto o denominador refere-se à dimensão na qual as representações são produzidas. Assim, um cubo representado sobre uma folha de papel é descrito como uma figura 3D/2D, e uma reta, como uma figura 1D/2D. A Figura 4 ilustra algumas maneiras de ver essa desconstrução, necessária às figuras geométricas no ensino de geometria.

Figura 4 - Algumas possíveis maneiras de ver uma figura em geometria



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Duval (2005 e 2011).

Na Figura 4, muitos outros elementos poderiam ser destacados, como os pontos de intersecção dos segmentos de reta, que são elementos 0D/2D, além de elementos que não estão explícitos na figura, como o centro (0D/2D) da circunferência que circunscreve os triângulos (neste caso, é necessário um olhar inventor sobre a figura). Outras possibilidades não matemáticas de reconhecimento da figura também poderiam ocorrer em um cenário de ensino, como Kummer e Moretti (2016) bem destacam; no caso da Figura 4, alguns poderiam reconhecer como sendo uma estrela de Davi, dependendo das manifestações culturais e religiosas do observador da figura, pautando, assim, mais o olhar icônico.

Duval alerta que "a maneira matemática de ver as figuras consiste em decompor, não importa qual a forma discriminada" (2005, p. 13). Isso quer dizer que, na matemática, ou mais precisamente em geometria, sempre nos deparamos com a necessidade de transitar entre as diferentes dimensões possíveis de uma figura.

Apesar da importância da desconstrução dimensional para a matemática, Duval (2005) argumenta em favor da "maneira normal" de se ver uma figura fora da matemática, isto é, não se preocupa com a dimensão da figura, ou em fazer variar essa dimensão em busca de reconhecer outras unidades ou propriedades sobre a figura. Isso, segundo Duval (2011), gera um custo cognitivo considerável entre as duas maneiras de ver.

> O problema cognitivo se coloca diferente para a geometria plana. A percepção visual impõe sistematicamente o reconhecimento de unidades figurais 2D contra o reconhecimento de unidades figurais 1D, independentemente de pertencerem às unidades figurais 2D reconhecidas. É essa desconstrução dimensional que é requerida pelo discurso matemático nas definições por exemplo (DUVAL, 2011, p. 94).

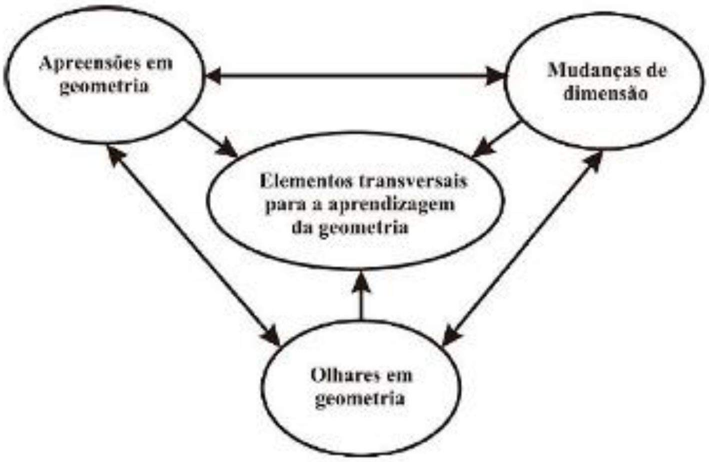
Ocorre que essa desconstrução dimensional se impõe como uma barreira cognitiva a ser superada no processo de ensino e aprendizagem. Para tentar superá-la, inicialmente necessitamos perceber sua existência e implicações decorrentes desse processo, pois os professores com seus alunos podem, muitas vezes, não se dar conta desses fatores.

Temos então que a resolução de atividades geométricas necessita, em grande parte, do desenvolvimento de uma forma própria de olhar, que favoreça o ensino e a aprendizagem da geometria, cabendo aos professores preocuparem-se com o desenvolvimento de atividades que visem a aquisição desse olhar por parte dos alunos.

Ensinar aos alunos a ver as figuras com este olhar matemático não é uma tarefa fácil, porém, compreendemos que tal ação pode ser potencializada a partir do reconhecimento da necessidade de se buscar atividades que visem proporcionar alternativas para avançar até essa forma de olhar.

A relevância desses elementos abordados nesta seção do artigo: apreensões, olhares e desconstrução dimensional, se justifica uma vez que são vistos como transversais para a aprendizagem da geometria por Hillesheim e Moretti (2020), pois para os autores, a efetiva aprendizagem da geometria, necessita articular estes elementos, pode ser percebido na ilustração apresentada na Figura 5.

Figura 5 - Elementos presentes na aprendizagem de geometria



Fonte: Hillesheim; Moretti (2020, p. 16).

Esses elementos dentro da geometria não são específicos de um conteúdo, mas se referem a um modo de conceber o processo de aprendizagem desse ramo da matemática, por isso, são essenciais e devem ser levados em consideração em nossas atividades didáticas. Neste artigo, em especial, daremos enfoque no trabalho de construções de validações empíricas e teóricas.

3 INDICAÇÕES METODOLÓGICAS DA PESQUISA

Para a produção e análise dos dados, adotamos como referência a metodologia qualitativa descritiva de investigação; para tal, buscamos uma aproximação com a Engenharia Didática (ED) de Artigue (1996).

Como já destacamos na introdução, a produção dos dados ocorreu no ambiente de um curso de extensão ofertado a um grupo de doze professores de matemática, todos atuantes na rede pública estadual de ensino, no município de Sinop, no estado de Mato Grosso. Os dados foram produzidos a partir da aplicação de um conjunto de 9 atividades, explorando conceitos geométricos, previamente selecionadas. Em decorrência da limitação de espaço, no presente estudo, exploramos 6 dessas atividades, conforme o Quadro 1.

A produção dos dados foi realizada em trios pelos professores (4 trios ao todo), os quais receberam, na análise, um nome fictício com duas letras e um número (exemplo: P4S): o número indica o trio pertencente (trio 4, no exemplo), a letra P faz menção à palavra “professor” e a última letra é aleatória (“S”, no exemplo), permitindo a identificação do professor por parte do pesquisador.

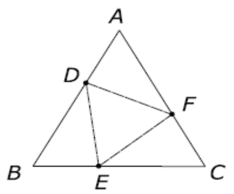
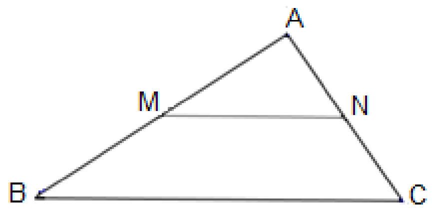
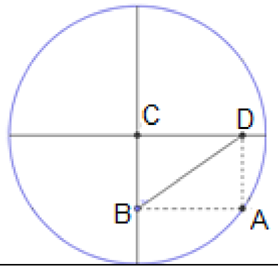
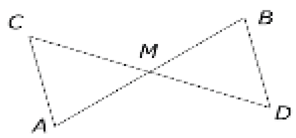
Cada atividade explorava uma propriedade geométrica, cuja demonstração matemática poderia ser realizada utilizando os casos de congruência de triângulos. Em cada atividade, os professores foram convidados a elaborar uma solução empírica e uma solução teórica e apresentar como cada uma das soluções poderia ser explorada em sala de aula.

O material produzido em cada atividade foi recolhido. Também, ao término de cada atividade, o trio explicava o que e como havia sido feito. Essas explicações foram gravadas em áudio e vídeo e, juntamente com o material escrito produzido, constituíram os dados que foram analisados.

Antes de passarmos para as análises, apresentamos no quadro a seguir as atividades geométricas trabalhadas, os professores serão frutos de análise na próxima seção.

Quadro 1 – Atividades de geometria aplicadas

Atividades	Descrição da atividade
Atividade 1	Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero. Sejam os pontos D, E e F sobre os lados desse triângulo tal que: $AD \equiv BE \equiv CF$, podemos garantir que o triângulo DEF é classificado como equilátero, escaleno ou isósceles não equilátero? Como fazer isso?

	
Atividade 2	Todo quadrilátero cujas diagonais se dividem ao meio será sempre um paralelogramo? Qual seria a recíproca dessa proposição? Ela também é verdadeira?
Atividade 3	Na figura abaixo, considere ABC um triângulo qualquer em que M é ponto médio de AB e N é ponto médio de AC. Nessa situação, o que é possível afirmar sobre MN em relação a BC? 
Atividade 4	Na figura a seguir, temos um círculo de raio conhecido e um retângulo ABCD. Nessas condições, o que podemos afirmar sobre a medida do segmento BD? 
Atividade 5	Dado um quadrilátero qualquer de vértices ABCD e sejam os pontos M, N, O e P os pontos médios respectivamente dos lados AB, BC, CD e DA, nessas condições, o que podemos afirmar sobre o quadrilátero com vértices MNOP?
Atividade 6	Na figura, dois segmentos AB e CD se interceptam no ponto M tal que: CM ≡ MD e AM ≡ MB. O que podemos afirmar sobre os segmentos AC e DB que ligam as extremidades dos segmentos AB e CD? 

Fonte: Material da pesquisa.

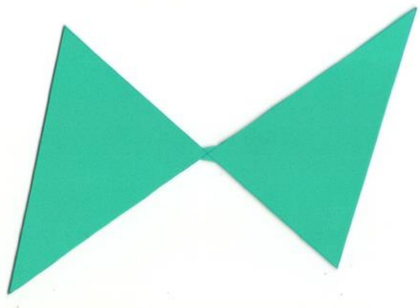
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

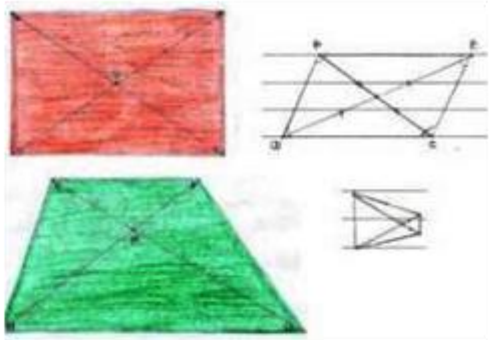
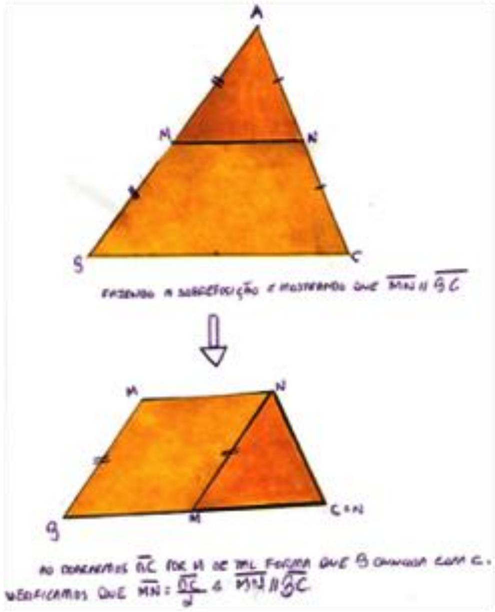
Os dados produzidos revelam que as provas empíricas foram marcadas pela utilização do registro figural, sejam na construção de materiais para posterior manipulação e reconfiguração, sejam na exploração de figuras dadas com medições, cálculos de áreas e dobraduras.

Olhando para a teoria de Duval, em particular sobre as particularidades dos modos de ver as figuras geométricas discutidas na seção anterior deste artigo, observamos como sendo particularidade o encaminhamento de trabalhos empíricos fortemente embasados na apreensão perceptiva das formas geométricas. Procuramos, com o Quadro 2, ilustrar parte dessa constatação, trazendo algumas construções de provas empíricas propostas pelos trios e o que elas nos indicam.

Como podemos observar no Quadro 2, houve, nos trabalhos de validação, por meio do material encaminhado, o forte emprego de uma apreensão perceptiva e assim é dado menor destaque às apreensões discursiva e operatória. Na atividade 6, por exemplo, ilustrada na primeira linha do quadro acima, nenhum trio destacou, de forma espontânea, a possibilidade de incluir os segmentos na figura para formar um quadrilátero (aplicar um olhar inventor visando à desconstrução dimensional 2D/1D), nem na prova teórica nem na prova empírica. Quadrilátero este que seria um paralelogramo por ter as diagonais mutuamente divididas ao meio. Ao contrário, apegam-se somente aos elementos dados a ver, ou seja, aos triângulos, e o trabalho é realizado apenas com eles.

Quadro 2 - Particularidades das construções empíricas propostas

Ilustração que representa a maior parte das construções empíricas propostas	**Descrição das particularidades sobre as propostas encaminhadas**
 (Atividade 6 – trio 2)	Todos os trios propõem algo parecido, uns em EVA, como este, e outros em papel. Exploração da apreensão sequencial na construção. Valorização da apreensão perceptiva, pois formas dadas a ver de imediato na figura do enunciado são usadas para construção. Não exploram a apreensão discursiva, não são trabalhadas as propriedades das figuras dadas no enunciado. A apreensão operatória é utilizada a partir de uma desconstrução 2D/2D apenas para reconfigurar a figura de modo a sobrepor os triângulos para constatação da igualdade. Não se aplica um olhar inventor com a inclusão de segmentos, por exemplo, para explorar propriedades dos paralelogramos que poderiam ser formados com a inserção de segmentos.

 (Atividade 2 – trios 1 e 4)	Três dos quatro trios propõem a validação pela construção e comparação das diagonais de diferentes quadriláteros. Mesmo solicitando fazer medições sobre as diagonais, de início essa diferença entre as diagonais se cruzarem no ponto médio ou não é sustentada visualmente, prevalecendo o olhar botanista e a apreensão perceptiva. Não é solicitado fazer desconstruções para utilizar uma apreensão operatória e olhar os triângulos formados pelas diagonais e pelos lados dos quadriláteros.
 (Atividade 3 – trio 3)	A maioria dos grupos propõe construção parecida, desconstruindo o triângulo por MN (2D/2D), porém utiliza-se de reconfigurações diferentes, a saber: trio 1 - após separação, afirma que BCNM é um trapézio, afirmação baseada na impressão visual sobre a figura (olhar botanista/apreensão perceptiva); trio 2 - reconfigura formando um paralelogramo externo e a afirmação de ser paralelogramo também é sustentada visualmente; trio 3 – reconfigura, formando um paralelogramo interno; só reconfigurar e afirmar que é um paralelogramo também é um argumento dado por um olhar botanista, com enfoque na apreensão perceptiva. Apesar de ser exigida uma desconstrução baseada na apreensão operatória, como vemos, em todos sobressai ainda a influência da apreensão perceptiva.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados produzidos no curso de extensão.

Transparece aqui um problema já denunciado por Duval (2012, p. 124), quando nos coloca que “os alunos se apegam na grande maioria à apreensão perceptiva: estes não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades ou das condições formuladas como hipóteses”. Aqui, nas atividades encaminhadas, observamos que os professores não olham a figura buscando relacionar propriedades e teoremas implícitos com as hipóteses levantadas. Pelo contrário, ficam preocupados com a manipulação geométrica e a busca de estabelecer relações entre elementos dados pela similaridade das figuras exploradas.

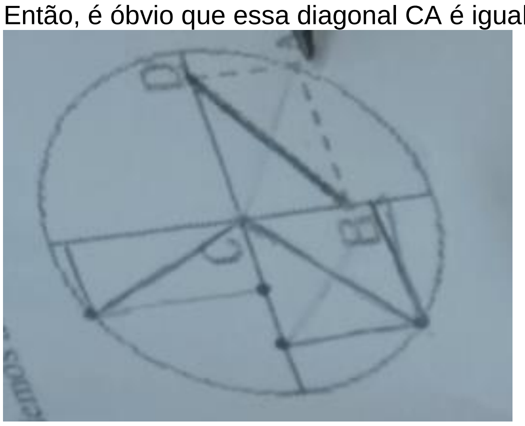
A predominância desse olhar voltado apenas aos elementos impostos pela figura ou enunciado, presente nas resoluções apresentadas pelos professores, vai contra ao que é necessário para ser realizado segundo a teoria de Duval, pois para o autor:

> é necessário primeiramente fazer com que os alunos passem da maneira natural de ver as figuras, que consiste em um reconhecimento perceptivo imediato de contornos fechados em 2D, à maneira matemática de olhá-las, que ao contrário, focaliza retas e segmentos 1D e pontos de intersecção 0D (DUVAL, 2014, p. 15).

Além do que foi apresentado no Quadro 2, para explicar esse apego à apreensão perceptiva, destacamos mais um exemplo do que ocorreu com o trio 1 e o trio 3, diante de uma atividade que necessita de desconstrução dimensional para inserção de um segmento.

O trio 1 na atividade 4, mesmo tendo realizado um trabalho exploratório desenhando várias figuras, levou-os a ver essa necessidade de inserção da outra diagonal no retângulo, como mostra o registro de áudio a seguir:

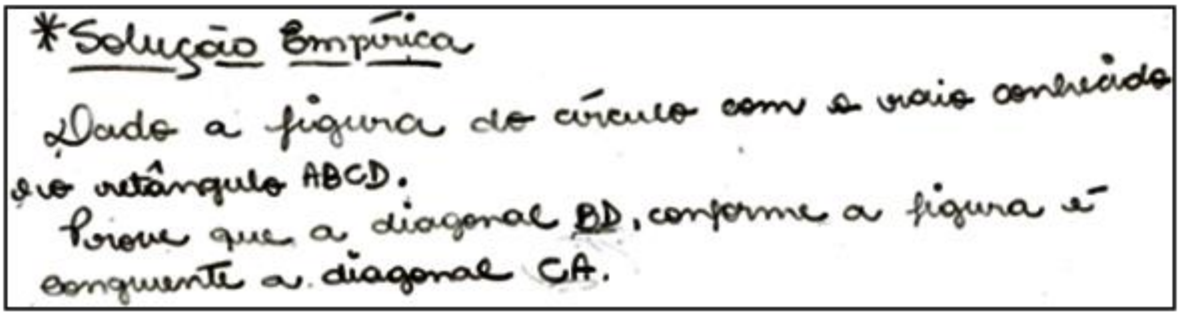
> **Pesquisador:** Vem cá que os desenhos delas estão interessantes [chamando a câmera para filmar do outro lado]. Vai ali atrás.
> **P1I:** É que, assim... eu fui fazer desenhos porque eu pensei assim: bom, deixa eu fazer retângulos e quadrados diferentes do outro lado para comprovar se vai bater. Aí eu fiz, aí eu estava fazendo a diagonal assim e pensei: ‘ah, mas vai bater é o raio’. Aí eu olhei e falei ‘não, mas, espera aí, essa diagonal não é essa, é ao contrário, [no original, não temos a diagonal que é raio da circunferência na figura] mas as duas diagonais são iguais’. Então, é óbvio que essa diagonal CA é igual a esta BD, é um raio.



(Figura a partir do *zoom* da câmera para ilustrar a investigação – diálogo registrado junto ao trio 1 sobre a atividade 4).

Depois dessa exploração e descoberta realizada, quando o trio vai propor a atividade para os alunos, essa diagonal do retângulo que eles demoraram para perceber ser a chave da solução da atividade, pois exige a aplicação de um olhar inventor, operando uma desconstrução dimensional 2D/1D e acrescentando esse segmento à figura, dando a possibilidade de trabalhar com outras propriedades, ela já é dada aos alunos como pode ser observado na Figura 6:

Figura 6 - Fragmento do encaminhamento da validação empírica do trio 1 para atividade 4


*Solução Empírica
Dado a figura do círculo com o raio conhecido e o retângulo ABCD.
Prove que a diagonal BD, conforme a figura é congruente a diagonal CA.

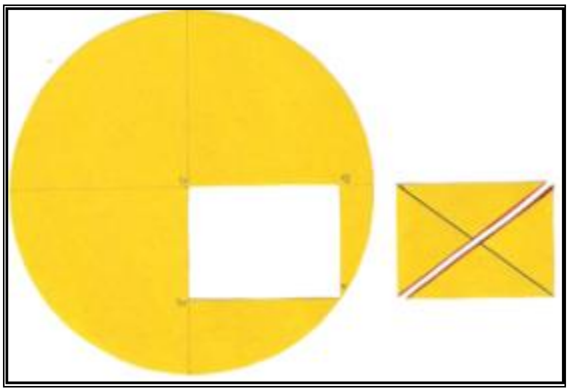
Fonte: Material entregue pelo trio 1.

Nesse caso, os alunos não necessitariam transpor essa barreira cognitiva imposta pela necessidade de operar a desconstrução dimensional 2D/1D. E, assim, a comprovação encaminhada fica restrita à manipulação e à comparação dos triângulos obtidos a partir das diagonais.

O trio 3 também destaca esse elemento não dado na figura (diagonal que é raio da circunferência) em sua construção (Figura 6), ou seja, o aluno não precisa transpor essa barreira, ficando para o aluno apenas a tarefa de constatar a congruência dos triângulos por sobreposição.

Destacados esses fatos, percebe-se que, mesmo nas atividades em que é necessário operar uma desconstrução dimensional, este trabalho é minimizado nos encaminhamentos a ponto de o emprego do olhar inventor, por parte do aluno, não ser necessário, bastando a comparação, sendo mais um ato perceptivo do que discursivo ou operatório.

Figura 7 - Material para validação empírica elaborado pelo trio 3 para a atividade 4



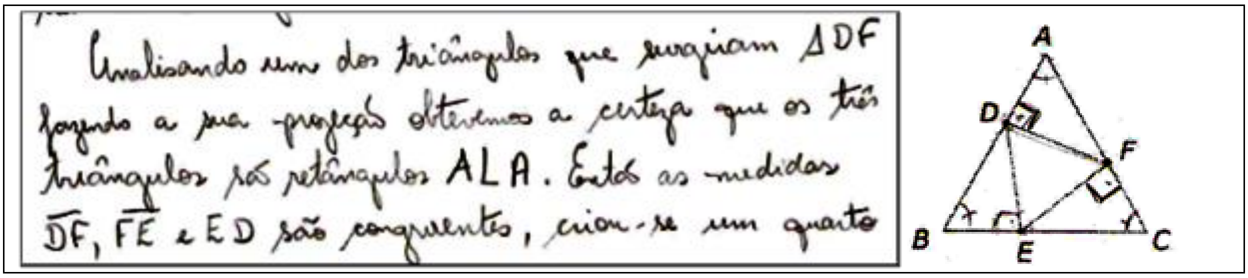
Fonte: Material entregue pelo trio 3.

O que sobressai nos trabalhos, então, é apenas uma desconstrução da figura imposta pelos elementos dados a ver na imagem, fazendo prevalecer desconstruções 2D/2D para posteriores reconfigurações figurais, impostas pela utilização da apreensão perceptiva das formas. Pouco incentivo é dado à realização de desconstruções do tipo 2D/1D e ao emprego do olhar inventor sobre a figura.

O esperado era que este olhar perceptivo aplicado à figura os levasse a ver elementos presentes ou novos nestas figuras, dos quais seria necessário propor uma investigação com elementos teóricos matemáticos, a fim de comprovar o que se impunha a ver, levando à elaboração de uma prova teórica. Por exemplo, com a adição de um segmento ou reconfiguração da figura, em algumas atividades fomos levados a ver uma figura que "parece" um paralelogramo (trapézio, triângulo equilátero, triângulos congruentes, como ocorreu em algumas atividades), o passo seguinte não é a adoção deste como verdade, mas sim a investigação, usando elementos matemáticos, de que de fato isto é verdade, o que conduziria à elaboração de provas teóricas articuladas com as constatações das provas empíricas.

Porém, o problema percebido foi que as provas teóricas produzidas também se embasaram fortemente pelo apego à apreensão perceptiva das formas, como ilustraremos a seguir, através da utilização de algumas passagens consideradas mais relevantes. Iniciemos pela prova teórica apresentada pelo trio 2 para a primeira atividade proposta, da qual trazemos um fragmento na Figura 8.

Figura 8 - Fragmento da prova teórica do trio 2 para a atividade 1


Analisando um dos triângulos que surgiam ΔDF
fazendo a sua projeção obtivemos a certeza que os três
triângulos são retângulos ALA. Então as medidas
$\overline{DF}$, $\overline{FE}$ e $\overline{ED}$ são congruentes, criou-se um quarto

Fonte: Material entregue pelo trio 2.

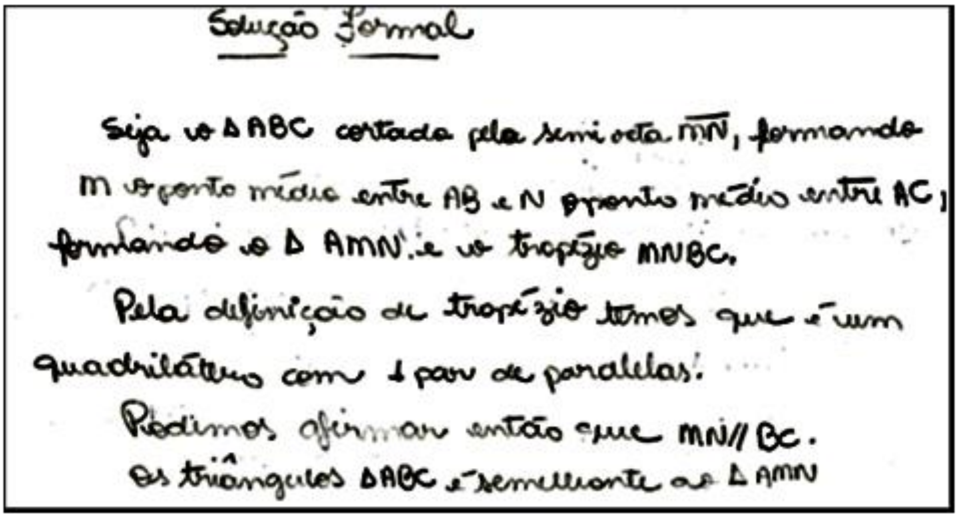
Nessa passagem da prova teórica produzida, eles deixam claro que teriam realizado a projeção ortogonal de AF sobre a reta que contém DF, a qual deveria ser DF para concluírem que $A\hat{D}F$ é um ângulo reto. Porém, pelo que foi possível perceber, durante as vezes em que fomos chamados pelo trio, é que eles não fizeram qualquer verificação (ou dedução) para concluir que DF era a projeção de AF sobre AB. Eles acharam e alegaram que $A\hat{D}F$ era ângulo reto e, quando perguntados o porquê disso, justificaram: “É a projeção” (P2R). No entanto, não há elementos no enunciado ou na figura que permitam garantir que o ângulo seja, de fato, reto.

O que percebemos é que uma impressão visual pela observação da figura levou a conclusão de que os ângulos em questão seriam retos, sendo assumida pelo grupo como verdadeira. Osorio (2015, p. 6) atribui isso aos “esquemas de provas perceptuais: sustentados em percepções visuais”, um elemento frequentemente utilizado na produção de provas empíricas. O que mostra que essa prova proposta pelo grupo se aproxima mais de uma prova empírica do que de uma teórica.

Além disso, a impressão visual que a figura passa ao trio repousa sobre uma apreensão perceptiva da figura, pois a impressão passada pela figura não é investigada, testada ou confrontada, é apenas assumida e utilizada, incorporada como uma propriedade (ser projeção ortogonal) e não verificada pelo trio.

Vejamos a prova teórica apresentada pelo trio 1 para a atividade 3, nela a dependência da impressão visual sobre a figura também transparece, como podemos observar a seguir:

Figura 9 – Prova teórica do trio 1 para a atividade 3


Solução Formal

Seja o ΔABC cortada pela semi reta MN, formando M o ponto médio entre AB e N o ponto médio entre AC, formando o Δ AMN e o trapézio MNBC.

Pela definição de trapézio temos que é um quadrilátero com 1 par de paralelas.

Podemos afirmar então que MN//BC.

Os triângulos ΔABC é semelhante ao Δ AMN

Fonte: Material entregue pelo trio 1.

Notemos que o grupo, no primeiro parágrafo, descreve a representação figural presente na atividade já afirmando que o triângulo original ABC é formado por um triângulo menor AMN e um trapézio MNBC, ou seja, nenhuma propriedade é enunciada para justificar que MNBC é, de fato, um trapézio. Essa certeza parece vir da percepção visual.

Como vemos no segundo parágrafo, o fato de MNBC ser um trapézio é usado para garantir que BC//MN a partir da definição de trapézio. Isso é melhor entendido ao observar o diálogo realizado durante a explicação interna da validação construída, como vemos a seguir:

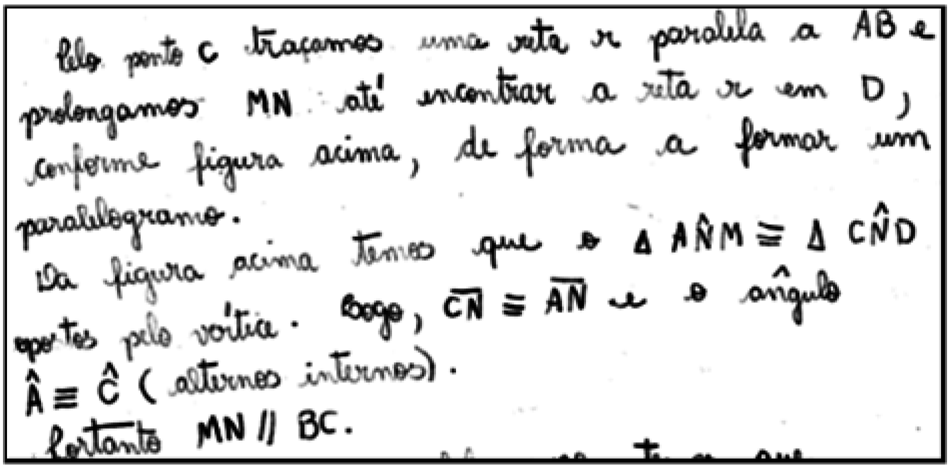
> **Pesquisador:** O que vocês dizem é assim: o fato de ser paralela é que este é ponto médio [apontando para o ponto M] e este é ponto médio [apontando para o ponto N]. É isso?
> **P1I:** Não!
> **P1S:** Não. O fato de ser paralelo é porque, na hora *que* eu traço MN [apontando para o segmento], eu obtenho um trapézio. E pela definição de trapézio. [PI1 interrompe P1S]
> **P1I:** Mas ele *tá* perguntando assim, se a gente considerou ser paralela porque era o ponto médio.
> **P1S:** Não, não!
> **P1M:** Não!
> **P1S:** É porque ele forma um trapézio, se ele forma um trapézio, ele tem um par de lados paralelos.
> **Pesquisador:** Mas como que eu sei que ele forma um trapézio? [Pausa de silêncio] porque, para ele formar um trapézio, não é por que tem dois lados paralelos?
> **Ambas juntas:** Sim!

> [. . .]
> **P1S:** A gente considerou que, pela definição de trapézio, tem que ter dois lados paralelos, assim é óbvio que essas retas aqui são paralelas [apontando para as retas].
> **P1I:** Sim, mas ele *tá* perguntando como a gente chegou *na* definição de que elas são paralelas para considerar isso um trapézio.
> **P1S:** Hum!
> **P1I:** A gente *tá* fazendo a mesma coisa que o professor mostrou na outra aula: a metade é igual a duas vezes este lado, e duas vezes este lado é igual a metade, então uma coisa é igual a outra. [Referindo-se a um exemplo abordado no encontro anterior em que outro trio usou um argumento circular equivalente].
> (Diálogo ocorrido durante a apresentação interna pelo trio 1).

Ao mesmo tempo em que é compreendido no diálogo que o trio estava utilizando um argumento equivocado para garantir o paralelismo entre BC e NM, é nítido também que esse argumento é sustentado por uma impressão visual passada pela figura ao grupo, ou seja, sobressai o emprego de uma apreensão perceptiva sobre a figura para afirmar que o quadrilátero em questão é um trapézio. Esse fato não é investigado e tampouco justificado.

Em alguns momentos, até mesmo quando a prova elaborada se aproximou da esperada, ainda percebemos a valorização da apreensão perceptiva, como vemos no fragmento da prova elaborada pelo trio 2 para a atividade 3, na figura a seguir.

Figura 10 - Segunda parte da prova teórica do trio 2 para a atividade 3



Pelo ponto C traçamos uma reta r paralela a AB e prolongamos MN até encontrar a reta r em D, conforme figura acima, de forma a formar um paralelogramo.
Da figura acima temos que o $\Delta A\hat{N}M \cong \Delta C\hat{N}D$
Logo, $\overline{CN} \cong \overline{AN}$ e o ângulo opostos pelo vértice.
$\hat{A} \equiv \hat{C}$ (alternos internos).
Portanto $MN \parallel BC$.

Fonte: Material produzido pelo trio 2.

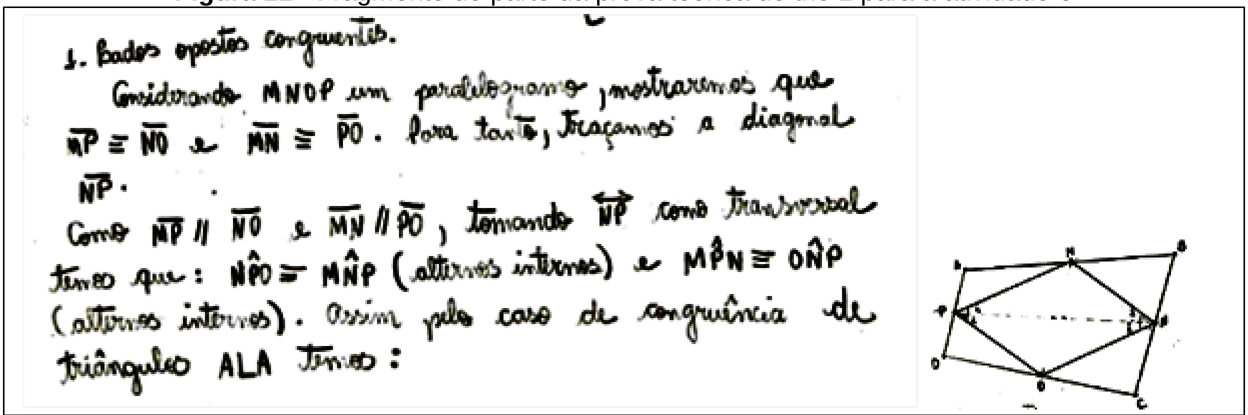
Como podemos observar, no início do primeiro parágrafo temos a descrição dos procedimentos necessários, via desconstrução dimensional, para construir um quadrilátero, a saber, MDCB. Contudo, no final do parágrafo, esse procedimento é tido como “de forma a formar um paralelogramo”. Mas na verdade, ele forma um quadrilátero, o qual devemos mostrar que é um paralelogramo. Não é possível afirmar que, só pela construção, o quadrilátero construído será um paralelogramo, como o grupo enuncia.

Fazer tal afirmação sem uma demonstração remete ao emprego de um olhar “botanista”, influenciado pela aparência do contorno da figura, ou seja, usa-se uma apreensão perceptiva das formas. Se, de fato, MDCB for um paralelogramo, NM será paralelo a BC e a primeira parte, que deveria ser provada, estaria terminada, ou seja, não há mais o que provar, pois foi aceita como verdadeira.

Na sequência, no último parágrafo, o grupo anuncia: “portanto, MN//BC”; esse anúncio é para ser interpretado como uma consequência da congruência entre os triângulos, porém, claramente, há uma lacuna, pois falta uma passagem. Esse paralelismo resulta da congruência entre os segmentos CD e BM (AM = BM, pelo fato de M ser ponto médio de AB), que são lados opostos do quadrilátero BCDM; e do fato de que, pela construção, eles também são paralelos. São, na verdade, esses três elementos: serem congruentes, opostos e paralelos que caracterizam como condição necessária e suficiente para garantir que BCDM seja um paralelogramo.

Essa postura de adotar propriedades a partir da impressão visual se mantém em outras atividades. Também para a atividade 5, o mesmo trio adota um quadrilátero como sendo paralelogramo sem comprovar, só pela impressão visual do mesmo (Figura 11).

Figura 11 - Fragmento de parte da prova teórica do trio 2 para a atividade 5


1. Lados opostos congruentes.
Considerando MNOP um paralelogramo, mostraremos que $\overline{MP} \cong \overline{NO}$ e $\overline{MN} \cong \overline{PO}$. Para tanto, traçamos a diagonal $\overline{NP}$.
Como $\overline{MP} \parallel \overline{NO}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{PO}$, tomando $\overleftrightarrow{NP}$ como transversal temos que: $N\hat{P}O \cong M\hat{N}P$ (alternos internos) e $M\hat{P}N \cong O\hat{N}P$ (alternos internos). Assim pelo caso de congruência de triângulos ALA temos:

Fonte: Material produzido pelo trio 2.

Eles já iniciam o discurso dedutivo com a expressão: “considerando MNOP um paralelogramo”. Mas isso é justamente o que deve ser demonstrado. Se, de fato, ele for considerado (por hipótese) como um paralelogramo, a congruência entre os lados opostos, que eles dizem que vão demonstrar, não faz sentido, pois já está garantida.

Essa forte aceitação da suficiência ao que a figura impõe a ver, sem perceber a necessidade de investigação e justificação teórica, de certa forma, conduz essas validações produzidas a conterem equívocos, não podendo ser caracterizadas como demonstrações do ponto de vista matemático.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebemos, na realização das análises, que apesar de haver a produção em duas categorias de provas, teóricas e empíricas, estes foram geralmente elaborados de forma independente, em que um não foi utilizado para dar suporte na construção do outro. Na contramão disso, a categoria das empíricas por muitas vezes foi utilizada como a responsável por trazer elementos tidos como verdadeiros para a categoria teórica, quando o esperado era que ele apenas indicasse o caminho que poderíamos percorrer na busca de construir uma validação teórica consistente.

O que parece contribuir para essa separação, no caminho adotado entre a construção da prova empírica e a da teórica, é o modo como as representações figurais foram olhadas pelos professores. Percebe-se claramente, nas provas empíricas apresentadas, a valorização de um olhar perceptivo sobre as formas, dadas pelos contornos já impostos a ver, ou seja, um envolvimento maior com a apreensão perceptiva das formas nos termos da teoria de Duval, este maior envolvimento minimiza a articulação com as outras apreensões importantes para a aprendizagem da geometria.

Parece claro que, se necessitamos que os alunos superem este apego à apreensão perceptiva no processo de aprendizagem, é essencial que os professores não se apeguem tão fortemente a ela no trabalho em sala de aula, mas consigam, também, transpô-la.

O grande problema de trabalhar com atividades que não buscam explorar a passagem entre as diferentes apreensões, em especial a operatória e a discursiva, como observamos nas atividades produzidas pelos professores, é que não favorece o desenvolvimento de trabalhos com demonstrações matemáticas, pois nessas necessitamos efetivamente da articulação entre as diferentes apreensões.

O forte apego à apreensão perceptiva também favorece o emprego de um olhar restrito aos elementos dados a ver de imediato na figura (valorização do olhar botanista), geralmente elementos 2D/2D, assim quase não observamos a busca de relação com outros elementos 1D/2D. Ocorrendo ainda que muitas vezes, quando o olhar inventor foi aplicado, utilizando-se da desconstrução dimensional e do reconhecimento de elementos 1D/2D, a forma adotada para propor os trabalhos para eventuais alunos, suprimia a necessidade cognitiva de identificação desses elementos, pois eles eram já destacados aos alunos nas propostas construídas.

As diferentes atividades envolvidas no estudo mostram que, não interessa se mudamos ou não a atividade, se não mudamos a forma de olhar para as figuras, se olhamos sempre com uma visão restrita, pautada pela percepção, sem buscar uma articulação entres as apreensões, não conseguiremos avançar rumo à solução de modo eficiente com respaldo teórico necessário à matemática.

Esperamos que o trabalho aqui descrito possa contribuir para a tomada de consciência da importância da articulação destes elementos: apreensões, olhares e desconstrução dimensional no ensino de geometria de uma forma geral, além dos enfoques na produção de provas empíricas e teóricas, como foram apresentadas aqui.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michele. Engenharia Didática. *In:* BRUN, Jean. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

DUVAL, Raymond. Les conditions conitives de l'aprentissage de La geometrie: développement de La visualisation, différenciation dês raisonnements et coordination de leus fonctionnements. **Annales de Didactique e de Sciences Cognitives**, n. 10 p. 5-53, 2005.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar Matemática de outra forma, entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. São Paulo: Editora PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. **REVEMAT,** Florianópolis, v. 7. n. 1, p. 118-138, 2012.

DUVAL, Raymond. Rupturas e Omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em Geometria. *In:* BRANDT, Celia Fink e MORETTI, Mércicles Thadeu (Org.) **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2014, p. 15-38.

HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Méricles Thadeu. Elementos transversais para a aprendizagem da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma proposta de currículo possível. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 15, p. 1-20, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e70277. Acesso em: 14 out. 2021.

KUMMER, Tarcísio; MORETTI, Mércicles Thadeu. Processos Psicológicos na construção do conhecimento matemático. **Revista ARETÉ,** Manaus, v. 9, n. 8, p. 100-114, jan./jul. 2016.

MORETTI, Mércicles Thadeu. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da Geometria. **Acta Scientiae**. Canoas/RS, v. 15, n. 2, p. 289-303, 2013.

OSORIO, Victor Larios. La construcción continua de la demosntración como médio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. In: XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática – CIAEM, 14, 2015, p. 1-15. Chiapas, México. **Anais [...]** Chiapas: Universidad Autónoma de Chiapas, 2015. Disponível em: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/729/312. Acesso em 10 dez. 2020.

TORREGROSA, Germán., QUESADA Humberto. Coordinacíon de procesos cognitivos em geometria. **Revista Latinoamericana de Investigação em Matemática Educativa**, México, v. 2, n. 10, p. 275-300, 2007.