



**INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO  
ALGÉBRICO:  
uma metodologia de ensino a compreensão de incógnitas<sup>1</sup>**

Gabriela Nery Pereira\*

Maria Nilsa Silva Braga\*\*

**RESUMO**

Este artigo é a consolidação de uma pesquisa sobre o uso da investigação matemática como metodologia de ensino para a construção e desenvolvimento do pensamento algébrico, e em particular, para a compreensão de incógnitas e equações em uma 6ª série de um colégio particular da cidade de Jequié-Ba. Nessa pesquisa procuramos compreender de que forma o uso da Investigação Matemática como metodologia de ensino pode contribuir para a construção e desenvolvimento do pensamento algébrico das incógnitas. Enquanto abordagem metodológica, optamos pela pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso com traços da pesquisa-ação. Para coleta dos dados utilizamos registros escritos produzidos por 10 alunos da turma em estudo e as anotações realizadas pela pesquisadora no decorrer da pesquisa. Esta visou identificar a formação de conceito algébrico nas situações propostas, principalmente nas que envolvem padrões e regularidades; analisar o nível de complexidade e imprevisibilidade nos processos de resolução, buscando identificar a ocorrência de formação de conceitos algébricos; e analisar o papel da investigação na construção do conhecimento matemático. O estudo realizado apresenta indicativos de que o uso de Investigações Matemáticas como metodologia de ensino pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para a construção do conceito de incógnitas, além de ser uma boa estratégia de aprendizagem para o aluno e de ensino para o professor.

---

<sup>1</sup> Artigo apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do Curso de Licenciatura em Matemática com Enfoque em Informática, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), *campus* de Jequié, em 2009, sob a orientação da professora Maria Nilsa Silva Braga.

\*Graduada em Licenciatura em Matemática com Enfoque em Informática pela UESB/ Jequié.

\*\* Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, do Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia. Professora do Departamento de Química e Exatas da UESB – *campus* de Jequié.

**Palavras-chave:** Matemática. Educação Matemática. Ensino-Aprendizagem da Matemática. Investigação Matemática. Pensamento Algébrico.

## 1 INTRODUÇÃO

No meu percurso como estudante do Ensino Fundamental e Médio somados à minha experiência docente, embora esta ainda não seja tão extensa, percebi que a Matemática não é bem vista aos olhos da maioria dos alunos, principalmente a partir da introdução da álgebra na 6ª série. É comum ouvir-se de alunos: ‘As contas até dão pra entender, mas tudo complica quando se juntam letras com os números’ ou até mesmo: ‘Onde já se viu somar letras?’. A dificuldade em entender o significado dos símbolos, a linguagem formal própria da álgebra e todas as regras e propriedades que lhes estão associadas podem explicar este fato.

A álgebra é considerada também, por professores, uma área difícil de ser trabalhada em sala de aula, uma vez que introduz muitos ‘conceitos novos’ e se torna muito abstrata aos alunos, pois a sua formalização requer uma linguagem específica, simbólica e rigorosa. Essa dificuldade aumenta ainda mais quando aliada à realidade de turmas heterogêneas e a professores que privilegiam mais os processos sintáticos (relativos às regras), que semânticos (relativos à interpretação de significados), como Araújo reforça:

Se não introduzir a álgebra de maneira significativa conectando os novos conhecimentos aos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação. (ARAÚJO, 2007 apud SCARLASSARI, 2007, p. 9).

Tais dificuldades constituem um dos meus objetos de investigação. Outro é a Investigação Matemática (IM) como metodologia de ensino, pois desde a disciplina de Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental II quando tive o primeiro contato me surgiu a ideia de pesquisar sobre tal metodologia. A Investigação em sala de aula tem revelado que a ‘aquisição de conhecimentos’, só por si assim como simples domínio de técnicas de cálculo não garantem o reconhecimento da sua aplicabilidade em situações novas, mas exigem dos alunos um pensar diferente, o ‘pensar matematicamente’ e requerem o envolvimento e a criatividade dos alunos. Segundo Ponte (2003), tais atividades caracterizam-se por partir de enunciados e objetivos pouco precisos e estruturados e exigirem que os próprios alunos definam o objetivo, conduzam as experiências, formulem e testem conjecturas.

Dessa maneira, quando se fez necessário decidir sobre o tema da pesquisa de final de curso, optei então por juntar a metodologia da IM com a dificuldade dos alunos em compreender a álgebra, vislumbrando assim encontrar não uma receita, mas um caminho para amenizar estas dificuldades algébricas que sabemos não serem poucas. Para tanto tentamos responder ao seguinte questionamento: De que forma a investigação matemática, enquanto metodologia contribui para a construção e desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, para a compreensão das noções e incógnitas?

Este trabalho foi desenvolvido a partir IM como estratégia didática. A investigação foi assim tomada em duas perspectivas: a primeira realizada pelos alunos, que não receberam os conceitos prontos, mas tiveram que construí-los através da investigação e ação, e a segunda realizada pelo professor/pesquisador que teve que investigar os processos usados pelos alunos para assim poder orientá-los na construção do seu conhecimento, baseando-nos assim em autores como Dario Fiorentini, Fernando Luís Pereira Fernandes, Eliane Matesco Cristovão, Hélia Oliveira, Joana Brocardo e João Pedro da Ponte.

Pretendemos investigar de que forma a IM, enquanto metodologia contribui para a construção e desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, para a compreensão das noções de incógnita. Objetivamos identificar a presença da formação de conceito algébrico nas situações propostas, principalmente nas que envolvem padrões e regularidades; analisar o nível de complexidade e imprevisibilidade nos processos de resolução, buscando identificar a ocorrência de formação de conceitos algébricos e analisar o papel da investigação na construção do conhecimento matemático.

Procuramos selecionar as atividades que foram desenvolvidas em classe de modo que estivessem ao alcance da maioria dos alunos, mas cientes de que poderíamos encontrar dificuldades decorrentes de atitudes e concepções por parte tanto do professor quanto do aluno. Nessa pesquisa, solucionar o problema foi mais do que encontrar a solução numérica, mas significou estabelecer um processo para o desenvolvimento do pensamento lógico validado por meio da ação do aluno.

Para tanto, iniciaremos fazendo uma breve revisão sobre a Investigação Matemática e também sobre as Concepções de Educação Algébrica. Num segundo momento apresentaremos sucintamente os procedimentos metodológicos da pesquisa, em seguida a análise dos dados coletados separando-os em três categorias: a presença do pensamento pré-algébrico, a transição do pensamento aritmético para o algébrico e, a presença do pensamento algébrico mais desenvolvido. E, para finalizar, as nossas considerações finais.

## 2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

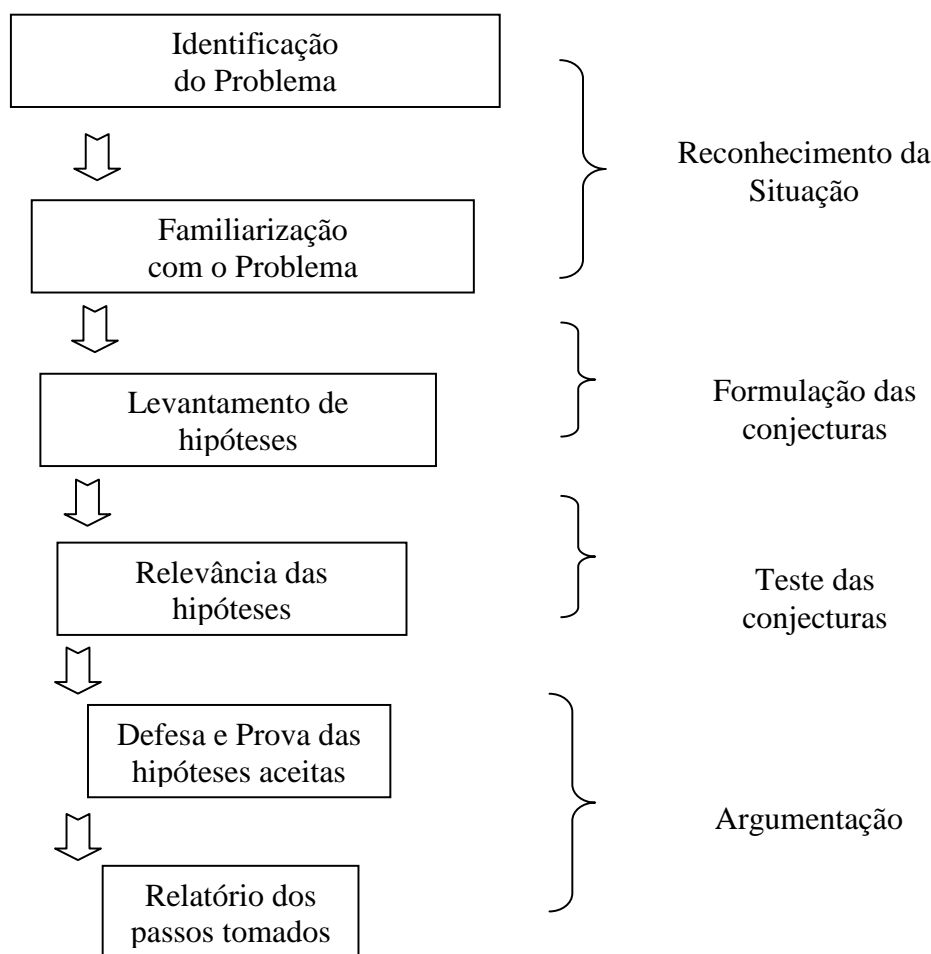
As atividades de investigação matemática têm um grande valor no processo de ensino aprendizagem da Matemática, permitindo identificar a aprendizagem com o fazer Matemática. Assim, a Matemática é encarada como uma forma de gerar conhecimento e não como um aglomerado de conhecimentos.

As experiências de IM têm por objetivo que os alunos sejam capazes de:

Identificar e iniciar os seus próprios problemas;  
Expressar as suas próprias idéias e desenvolvê-las ao resolver problemas;  
Testar as suas idéias e hipóteses de acordo com experiências relevantes;  
Defender racionalmente as suas idéias e conclusões e submeter às idéias dos outros a crítica ponderada;  
Escrever organizadamente as idéias formuladas. (LOVE, 1988 apud OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1996, p. 1-2).

Estes objetivos podem ser expressos pelo seguinte diagrama:

Figura 1: Desenvolvimento do trabalho com IM



Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003.

Segundo Oliveira, Segurado e Ponte (1996, p. 2), para que uma situação possa ser caracterizada como investigação é fundamental “[...] que seja motivadora e desafiadora, não sendo imediatamente acessíveis, ao aluno, o processo de resolução e a solução ou soluções da questão.”

Castro (2004 apud FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2009) conceitua aula investigativa como as aulas que envolvem os alunos com tarefas investigativas que permitam a eles realizarem atividades matemáticas.

As atividades investigativas diferem bastante das atividades que estamos habituados a presenciar, ou seja, aquelas atividades mecânicas, do tipo façam seguindo o modelo, usadas no processo de ensino aprendizagem, pois são questões abertas, e permitem que o aluno estabeleça o seu próprio caminho a seguir e crie as suas próprias questões.

“As investigações matemáticas caracterizam-se, igualmente, pelo estímulo que fornecem ao aluno no sentido de este justificar e provar as suas afirmações, e de explicitar matematicamente as suas argumentações perante os colegas e o professor [...]” é o chamado ‘comunicar-se matematicamente’. (NCTM, 1991 apud OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1996).

Com as questões abertas, a possibilidade de questões e conclusões distintas entre os alunos devem ser devidamente observadas, pois ao confrontarem as suas diferentes conjecturas, os alunos constituem-se como um grupo de pessoas que pensam matematicamente, no qual o conhecimento matemático se desenvolve em conjunto.

Dessa maneira, uma atividade investigativa:

[...] ajuda a trazer para a sala de aula o espírito de atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

De um modo geral, o trabalho investigativo se desenvolve em três fases. São elas:

#### 1. Introdução da Investigação:

Para introduzir uma questão com o intuito de se fazer uma aula investigativa é necessário que o professor esteja devidamente preparado, para que estimule os seus alunos no desenvolver das tarefas. Não é suficiente apenas entregar as questões aos alunos e achar que eles vão desenvolvê-la com êxito, mas sim estar a todo momento mediando e questionando para que se sintam instigados e excitados com a resolução da tarefa.

Oliveira, Segurado e Ponte (1996) salientam que “[...] a motivação dos alunos para esse tipo de atividade decorre, com frequência, de todo um trabalho que vai sendo desenvolvido [...]”. Estes autores destacam ainda que é necessário que “[...] o professor se sinta confiante quanto à adesão dos alunos mesmo quando entrega a tarefa por escrito e não tece comentário algum.” É válido salientar que a interpretação das questões deve ser estimulada pelo trabalho no grupo.

É interessante que a introdução da tarefa tenha uma curta duração e que se crie o ambiente apropriado, para que os alunos tenham tempo para trabalhar, aproveitando bem o período, que normalmente varia de uma aula (50 minutos) a 2 aulas (100 minutos).

## 2. Execução da Investigação:

Como já foi sucintamente mencionado anteriormente, o professor deve estar preparado para desenvolver uma atividade deste tipo e é nesta etapa do processo que o professor assume o papel mais complicado. Aqui o docente deve dar apoio aos seus alunos, no sentido de ajudá-los a quebrar certos bloqueios ou a tornar mais rica a sua investigação.

É válido ressaltar a importância da reflexão do discente sobre o seu trabalho. Tal reflexão pode ser estimulada direta ou indiretamente pelo professor, o que requer experiência e sensibilidade para que o trabalho seja realizado de uma forma bem sucedida.

Durante essa fase, o professor tem um papel de orientador da atividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo do trabalho dos alunos e do tipo de apoio que preste no desenvolvimento das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 2009, p. 6)

Oliveira, Segurado e Ponte (1996) sugere que alguns questionamentos podem ajudar os alunos no desenvolvimento de seu trabalho, tais como:

Como você tentou?

O que está tentando fazer?

O que pensa sobre isso?

Porque está fazendo assim?

O que você já descobriu?

Como podemos organizar isto?

Verificou se funciona mesmo?

Você consegue ver algum padrão?

Vamos construir uma tabela de resultados?

É sempre necessário estar atento, pois como existem alunos de ‘diferentes mundos’, é possível que existam resultados inesperados para determinada questão. O professor pode ter se preparado para  $n$  resultados, mas algum(ns) aluno(s) lhe surpreender com uma abordagem em que não se tinha pensado até o momento. O professor/mediador precisa, então, estar predisposto e preparado para perceber e dar continuidade aos caminhos inusitados dos alunos.

Deve-se estar atento ainda, para um dos objetivos principais da investigação: A justificação das hipóteses levantadas, o papel do professor é incentivar o aluno a estar sempre testando o que foi feito até o momento, para que ele próprio perceba a validade do que foi levantado.

### 3. Discussão da Investigação:

Sem a discussão final acerca das atividades dos alunos pode-se perder o intuito da investigação. É nesta etapa que serão confrontadas “[...] as estratégias, as hipóteses e as justificações que os diferentes alunos ou grupos de alunos construíram, e que o professor, assume as funções de mediador.” Nesta fase ainda, “ele procurará trazer à atenção da turma os aspectos mais destacados do trabalho desenvolvido e estimulará os alunos a questionarem as asserções dos seus pares. Assim, o desenvolvimento da capacidade dos alunos para comunicar-se matematicamente e o poder de argumentação são dois dos objetivos destacados desta fase da actividade investigativa.” (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1996, p. 6-7).

Nessa fase o professor deverá estimular a comunicação entre os alunos. Estes serão confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que haviam pensado, criando assim um ambiente de argumentação e defesa das suas afirmações. Como referem Bishop e Goffree (1986 apud FONSECA; BRUNEIRA; PONTE, 2009, p. 9), “a aprendizagem não resulta simplesmente da atividade, mas da reflexão sobre a atividade”. Desse modo é fundamental

[...] proporcionar aos alunos momentos que possam pensar e sobretudo refletir sobre a atividade realizada. [...] esta reflexão permite, por exemplo, valorizar os processos de resolução em relação aos produtos, mesmo que estes não conduzam a uma resposta final correta, criando nos alunos uma visão mais verdadeira da Matemática [...] (FONSECA; BRUNEIRA; PONTE, 2009, p. 9)

## 3 CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

Na resolução, quase que automática, de equações do 1º grau, nem se pensa em todos os séculos de estudos que foram necessários para se chegar a tal ponto. A linguagem

simbólica utilizada na álgebra simplifica vários cálculos, e muitas vezes os alunos a utilizam sem perceber o significado de tudo aquilo que estão fazendo.

Através da investigação matemática em sala de aula pretende-se perceber como acontece o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica pelos alunos. Para tanto, iniciaremos nosso estudo sobre álgebra dando ênfase às três concepções de educação algébrica entre os professores, que segundo Fiorentini, Miorin e Miguel (1993 apud GIL; PORTANOVA, 2009) vêm exercendo maior influência no ensino de matemática elementar. São elas:

- Linguística-pragmática: Predominou praticamente durante todo o século XIX até a metade do século XX, tanto no Brasil, como em outros países. Perdurava a crença de que apenas as técnicas, ainda que mecânicas, eram suficientes para que os alunos adquirissem a capacidade de resolver problemas, mesmo que estes fossem quase sempre artificiais. A álgebra não necessitava de objetos concretos, é puramente aplicada à resolução de problemas e visa que o aluno resolva-os de maneira sistemática. O currículo de ensino em álgebra tinha como ponto de partida o cálculo literal, ou seja, a adição, subtração, multiplicação, fatoração, e divisão de expressões algébricas, o qual era desenvolvido por meio de repetições. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2009).

- Fundamentalista-estrutural: Surgiu aproximadamente na segunda metade do século XX, predominando nas décadas de 70 e 80. Com o Movimento da Matemática Moderna, o ensino da álgebra assume a finalidade de fornecer fundamentos lógico-matemáticos para toda a matemática escolar. Prevalencia a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações que justificassem cada passagem presente no cálculo algébrico capacitaria o aluno a identificar e aplicar essas estruturas nos mais diferentes contextos. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2009).

- Fundamentalista-análoga: Após o fracasso do Movimento da Matemática Moderna, surge esta nova concepção da Educação algébrica, “[...] a qual procura fazer uma síntese entre as duas primeiras, pois tenta recuperar o valor instrumental da álgebra [...]” e manter o caráter fundamentalista de justificação, mas não mais de forma lógico-estrutural, e sim, baseando-se em recursos geométricos e visuais. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2009, p. 4). O ponto problemático e comum entre estas três concepções, é que:

[...] as três concepções enfatizam o ensino de uma linguagem algébrica já constituída priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, a álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas, ela é também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2009, p. 4)



De um modo geral, no ensino da matemática existe uma grande ênfase na transmissão de como escrever algebricamente e deixa-se de lado o desenvolvimento das demais competências. Assim pretende-se, por meio da investigação matemática colocar os alunos diante de situações significativas que os levem a entender a álgebra como uma linguagem que possui modos próprios de registro e expressão, deixando para trás todos aqueles códigos indecifráveis e enxergando como uma linguagem que expressa ideias e que é totalmente traduzível. Dessa maneira, nossas atividades serão próximas da concepção fundamentalista-análoga, porém com pretensões menos instrumentais.

#### **4 OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E AS TAREFAS**

A investigação realizada constituiu-se de um estudo de caso que segundo Gil (1988 apud FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 109) “é um estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, com contornos claramente definidos, permitindo seu amplo e detalhado conhecimento”. Mas, também apresentou características da pesquisa-ação que:

[...] é um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes. (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 109).

Assim, denotamos que esta pesquisa se constituiu de um estudo de caso com traços da pesquisa-ação, sob uma perspectiva de caráter qualitativo. Tendo como sujeitos 10 alunos de uma turma da 6ª série do Ensino Fundamental regida pela professora pesquisadora de uma escola da rede particular, situada na cidade de Jequié, Bahia. Alunos, estes que tinham, em média, 11 anos e eram bem curiosos e questionadores, o que tornou as aulas interessantes e proveitosas.

Optamos então por este tipo de pesquisa por saber da dificuldade da tarefa, visto que nosso objetivo era perceber o desenvolvimento dos conceitos algébricos a partir de atividades investigativas. Utilizamos como instrumentos de coleta de dados os registros escritos realizados pelos sujeitos da pesquisa, bem como as anotações realizadas pela professora pesquisadora no decorrer das atividades investigativas.

A preparação das aulas e tarefas de investigação foi uma das fases mais importantes nesse projeto, pois procuramos selecioná-las, adaptá-las e algumas até construí-las, de modo a

contemplar vários aspectos, tais como, serem questões abertas e ricas em potencial exploratório-investigativo, estimulantes em relação ao pensamento matemático e condizentes com objetivo em questão.

Quanto à dinâmica das aulas tivemos a seguinte orientação, devidamente apresentada aos alunos na lousa:

- Divisão da turma em três grupos;
- Apresentação das tarefas, tendo o cuidado de fazer a leitura coletiva e dar a orientação necessária para o início da tarefa;
- Investigação dos grupos, com a ajuda da professora/pesquisadora;
- Levantamento de hipóteses/conjecturas;
- Teste das hipóteses/conjecturas;
- Organização e escrita do relatório da investigação;
- Socialização e discussão das respostas dos grupos.

As tarefas buscavam explorar aspectos e níveis diferentes do pensamento algébrico. Conforme as atividades iam sendo resolvidas ia aumentando a dificuldade e complexidade das questões.

O trabalho foi desenvolvido em dois dias com carga de horária de 3 horas/aula perfazendo assim um total de 6 horas/aula e realizado em três grupos de três alunos cada, visto que, faltou um aluno em cada dia.

## **5 ANÁLISE DE ALGUMAS RESOLUÇÕES APRESENTADAS PELOS GRUPOS**

No primeiro momento de atividade investigativa, a turma foi dividida por afinidade em três grupos e foram apresentados os passos que deveriam ser tomados ao resolver a tarefa. Todas as tarefas foram lidas coletivamente para não deixar nenhuma dúvida sobre o seu objetivo. Como já foi dito, eram questões abertas, o que permitiam diferentes resoluções, exceto as que já apresentavam a hipótese e que os instigavam a prová-la.

Os alunos se envolveram na atividade e a desenvolviam com muita empolgação e atenção. No início apresentaram dificuldades em escrever o que estavam pensando e justificar o que haviam afirmado. Mas, após um tempo foram se familiarizando com a proposta e cada vez mais melhorando suas respostas e justificativas, como podemos ilustrar com a resposta abaixo de um grupo à uma questão em que eles eram instigados a provar uma hipótese já apresentada.

Figura 2: Atividade investigativa 1

Pense em um número: 5  
Some com 10:  
Subtraia 8:  
Some 7:  
Subtraia o número que você pensou inicialmente:  
Deu 9. ACERTE? Isso não é mágica. Pense e explique porque isso aconteceu.

$$x+10-8+7-x$$

$$x+2+7-x$$

$$+x+9-x$$

$$0+9$$

$$9$$

Um número multiplicado por 3 somado com 7, subtraído 2 e dividido por 7 dá -1. Você consegue dizer qual é esse número? Explique.

$$-1 \cdot 7 \times 3 + 7 - 2 \div 7$$

$$-7 \times 3 + 7 - 2 \div 7$$

$$-21 + 7 - 2 \div 7$$

$$-14 - 2 \div 7$$

$$-14 - \frac{2}{7}$$

$$-\frac{98}{7} - \frac{2}{7}$$

$$-\frac{100}{7}$$

Que o número pensado vai dar positivo e negativo e a soma entre eles dois é igual a zero, mas final somado com nove dá nove.

Pensamento aritmético: o grupo testa a hipótese

Linguagem expressa por símbolos (simbólica), Prova da

Linguagem expressa por palavras (retórica).

Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

O grupo, ao responder a atividade acima, deixa claro em sua resposta, os passos da investigação, uma vez que ela inicia utilizando a aritmética e atribui um valor numérico para constatar que é verdade o que o problema diz, em seguida, parte para uma ‘aritmética generalizada’ (TELES, 2004) do problema utilizando a linguagem algébrica simbólica<sup>2</sup> para provar a hipótese dada e finaliza justificando ainda utilizando uma linguagem algébrica retórica<sup>3</sup>.

A partir daqui trabalharemos com categorias pré-estabelecidas, baseadas no estudo de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2009), com intuito de facilitar a nossa análise, são elas: Presença do pensamento pré-algébrico, ou pensamento aritmético, Transição do pensamento aritmético ao algébrico e pensamento algébrico mais desenvolvido.

### 5.1 PRESENÇA DE PENSAMENTO AINDA ARITMÉTICO

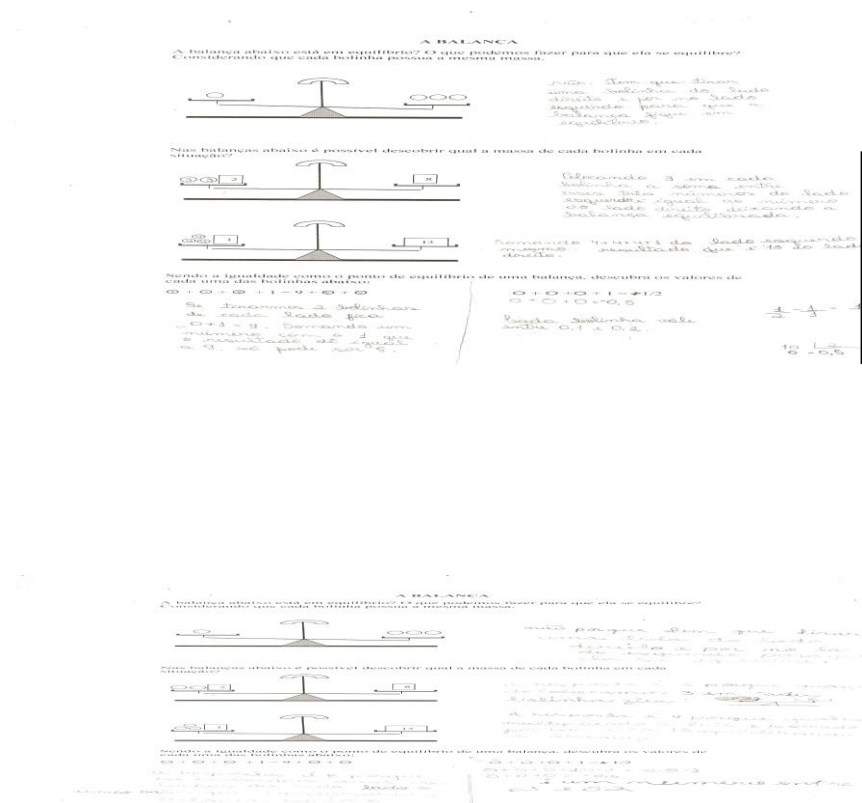
<sup>2</sup> As expressões e equações são escritas do modo que conhecemos hoje, totalmente expressas em símbolos.  
<sup>3</sup> As expressões são escritas totalmente em palavras.

No início das atividades os grupos denotaram a predominância do pensamento pré-algébrico ou mesmo aritmético.

Um exemplo que ajuda a perceber tal situação é quando os alunos procuravam encontrar a solução para as questões por tentativas, substituindo o ‘valor desconhecido’, por algum valor conhecido (numérico) até que a igualdade fosse verdadeira.

Figura 3: Atividade investigativa – valor desconhecido

Grupo 1:



Transcrição da resposta:

Colocando 3 em cada bolinha a soma entre esses três número é igual o número do lado direito deixando a balança equilibrada.

A resposta é 4 porque quatro multiplicado a três e somado por um é = a 13 equilibrando a balança.

Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

## 5.2 TRANSIÇÃO DO PENSAMENTO ARITMÉTICO AO ALGÉBRICO

Com o transcorrer das atividades os grupos mostraram evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico. Selecionamos para análise algumas resoluções.

Um dos grupos apresentou a noção de tirar dos dois lados, demonstrando ter o conceito de equilíbrio bem formado, aplicando inclusive o ‘cancelamento’ de variáveis:

Figura 4: Atividade investigativa – cancelamento de variáveis: 1ª Situação

Grupo 1:

Sendo a igualdade como o ponto de equilíbrio de uma balança, descubra os valores de cada uma das bolinhas abaixo:

Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

Outro grupo apresentou a noção de variável, uma vez que escreveu uma expressão generalizada para encontrar o número de pontos da figura. Percebe-se ainda com a resposta que o grupo percebeu um aspecto invariante (a fórmula geral) em contraste com o outro que varia (se mudar o número da figura se altera o valor total de pontos).

Figura 5: Atividade investigativa – cancelamento de variáveis: 2ª Situação

Grupo 2:

Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

Chamou a atenção, o grupo ter apresentado duas vezes o variante ‘...’, pois ainda que tenha escrito o mesmo símbolo (o que para nós significaria ser o mesmo valor) ele diferenciava um valor do outro, ou seja, o segundo ‘...’ utilizado pelo aluno assume aqui a mesma forma de representação da variável dependente ‘y’ numa função. Para ilustrar, segue um pequeno recorte do diálogo ocorrido entre a pesquisadora (professora) e o aluno (aluno1) representante do grupo, na hora de fazer a exposição à turma:

**(01) Aluno1<sup>4</sup>:** Posso escrever assim professora? [ ... x 4 + 1 = ...]

**(02) Professora:** O que significa esses três pontinhos?

**(03) Aluno1:** É porque é o valor que vai mudar. Sempre que eu quiser achar o número de pontinhos da figura, nem precisa ficar contando de quatro em quatro, é só colocar nessa regra que vai.

**(04) Professora:** Mas porque tem duas vezes o ‘...’?

**(05) Aluno1:** É porque quando a gente troca o número da figura, vai trocar também o número de pontos. Não é fixo.

**(06) Professora:** Vocês concordam com o que o colega disse? [se dirigindo ao restante da turma]

**(07) Turma:** Sim professora.

**(08) Aluna 2:** Fica até mais fácil assim do que ficar toda hora botando mais quatro.

### 5.3 PENSAMENTO ALGÉBRICO MAIS DESENVOLVIDO

Quando estava quase na etapa final do processo de pesquisa, e quando o nível de dificuldade das tarefas estava mais elevado, foi quando os grupos denotaram, em suas resoluções e relatórios, um pensamento algébrico mais desenvolvido.

---

<sup>4</sup> Diálogo da pesquisadora com os participantes da pesquisa durante o desenvolvimento da intervenção didática.

Como já conhecia a turma, e os alunos sempre me indagavam se sabia fazer aquelas brincadeiras de ‘pensar em um número’, resolvi que poderia utilizá-las agora como uma atividade de investigação que os estimulasse mais ainda. Foi justamente nessas atividades que nos surpreendemos com manifestações de pensamento algébrico mais desenvolvido, onde pudemos notar a utilização das propriedades aritméticas, operação inversa, número oposto, e até semelhança de monômios.

Observe os exemplos a seguir:

Figura 6: Atividade investigativa – pensar em um número 1

Grupo 3:

Pense em um número:  
 Some com 10:  
 Subtraia 8:  
 Some 7:  
 Subtraia o número que você pensou inicialmente:

Deu 9. ACERTEI? Isso não é mágica. Pense e explique porque isso acontece.

*porque  $10 - 8 + 7 = 9$  e o número que a gente pensou é cancelado.*

Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

Enquanto esse grupo apresenta a solução escrita como uma soma dos números já conhecidos do problema e justifica que o número pensado é ‘cancelado’ [elemento simétrico], o grupo 2 representa a prova da hipótese com uma expressão algébrica, além da explicação escrita que demonstra a aceitação do  $x$  como um número.

Figura 7: Atividade investigativa – pensar em um número 1: justificativa

$$x + 10 - 8 + 7 - x =$$

$$x + 9 - x = 9$$

*Porque o número  $x$  vai estar oposto a ele mesmo que dá 0 e depois é somado a qualquer número, que vai dar o mesmo número.*

Fonte: Dados da Pesquisa, 2009.

Tal grupo me apresentou a resolução da resposta quase que imediatamente e enquanto acompanhava o desenvolvimento dos outros grupos, fui surpreendida com um problema proposto por um aluno do grupo que já havia terminado. O qual dizia:

Figura 8: Atividade investigativa – pensar em um número 1: proposta por um aluno

Pense em um número entre 0 e 10.  
Some: 6  
Multiplique: 2  
Some: 12  
Dividido: 2  
Menos o primeiro número pensado.

Transcrição:

Pense em um número entre 0 e 10.  
Some: 6  
Multiplique: 2  
Some: 12  
Dividido: 2  
Menos o primeiro número pensado.

Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

Após realizar todas as contas solicitadas pelo aluno, ele sorrindo disse:

**(09) Aluno:** Deu 12.

**(10) Professora:** Realmente. Deu 12. Como você conseguiu?

**(11) Aluno:** Eu ‘tava’ tentando desde que terminei de resolver aquele outro, e consegui achar uma regra que valia para qualquer número e sempre vai dar 12 no final.

**(12) Professora:** Mas, você sabe por que isso acontece?

**(13) Aluno:** Olha aqui a expressão que escrevi para dizer meu desafio:

Figura 8: Resolução apresentada pelo aluno que propôs a atividade investigativa

$$x + 6 \cdot 2 + 12 \div 2 - x$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

**(14) Professora:** Mas porque sempre vai dar 12?



(15) Aluno: Não sei. Mas, sempre vai dar.

Esta atividade demonstrou o quanto a investigação foi válida, apesar do aluno não conseguir provar a sua conjectura, mas evidenciou o levantamento e teste das hipóteses, pois notei o quanto a folha em que ele me apresentou o desafio estava rabiscada e manchada de tanto apagar até encontrar uma regra que valesse para qualquer número.

A expressão que pode ser simplificar o raciocínio do aluno pode ser expressa por:

$$\{(x + 6) \cdot 2 + 12\} / 2 - x$$

$$\{[2x + 12 + 12] / 2\} - x$$

$$\{[2x + 24] / 2\} - x$$

$$\{x + 12\} - x$$

$$12$$

A próxima atividade que apresentarei a seguir foi, sem dúvida, a que mais chamou a atenção, pois a resolução de um dos grupos apresentou alto nível de representação e resolução algébrica. Observe:

Figura 9: Atividade investigativa – pense em um numero 2

Pense em um número:  
 Multiplique por 2:  
 Soma 10:  
 Divida o resultado por 2 e subtraia o número pensado.  
 Deu 5?

Pense em outro número:  
 Multiplique por 2:  
 Soma 24:  
 Divida o resultado por 2 e subtraia o número pensado.  
 Deu 12?

E se na hora de somar, ao lugar de 10 eu 24 eu somasse 36 você saberia me dizer qual o resultado? E se fosse somado 12? Sim - 15, 25

Reflita e tente explicar porque isso acontece?

$$\{(x \times 2) + 10\} \div 2 - x$$

$$\{[2x + 10] \div 2\} - x$$

$$\{xx \div 2 + 10 \div 2\} - x$$

$$\{x + 5\} - x$$

$$0 + 5$$

$$5$$

O resultado da sempre a metade do número da 3ª instrução.  
 Porque o número se anula chegando a metade.

O resultado da sempre a metade do número da 3ª instrução.

Porque o número se anula chegando a metade.

Prova algébrica da hipótese para o número 10.

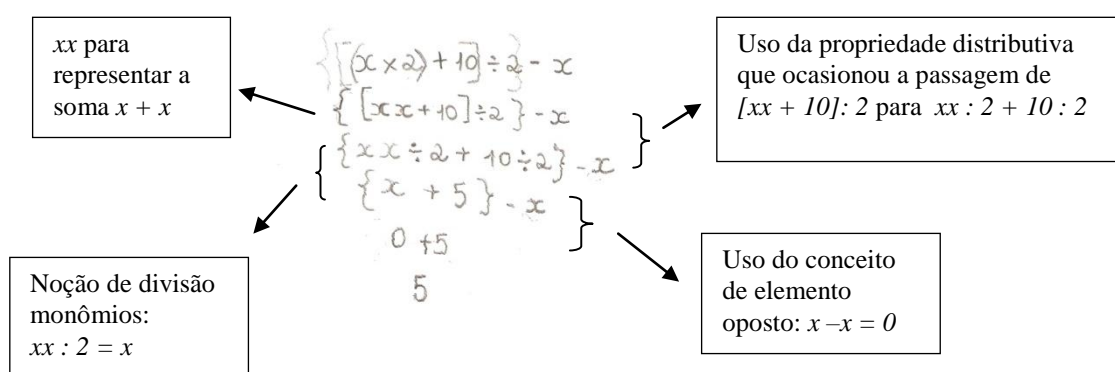
Justificativa da hipótese levantada

Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

Vale salientar que na hora, deste grupo, montar a expressão para representar a situação houve uma confusão para saber o que deveria resolver primeiro. Então, questionei sobre como fazer para ditar a sequência de uma expressão numérica. Foi só aí então que utilizaram os parênteses, colchetes e chaves.

Note que na resolução algébrica apresentada, o grupo faz uso da notação  $xx$ , o que para eles não representa o produto de  $x$  por  $x$ , mas sim a soma entre esses dois números, visto que, até então ainda não havíamos formalizado nenhuma notação. Observe também a perfeita utilização da propriedade distributiva, o que evidenciou a boa formação que estavam tendo até o momento.

Figura 10: Atividade investigativa – pense em um numero 2: propriedade distributiva



Fonte: Dados da pesquisa, 2009.

Este grupo apresentou um estágio de pensamento algébrico bastante desenvolvido para alunos da 6ª série do Ensino Fundamental.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise da experiência de ensino desenvolvida com tarefas investigativas mostra que esta é uma situação muito rica para a construção do pensamento algébrico dos alunos. Ficou notável a grande diferença entre o nível das respostas da primeira atividade quando comparada com a última, em que ficou claro que foi desenvolvido um pensamento tipicamente algébrico, além da sua representação utilizando linguagem simbólica, principalmente naquelas em que se tratavam de padrões e regularidades. E, ao se apropriar desta linguagem, o pensamento passa a fluir cada vez melhor, conseguindo expressar relações ainda mais complexas.

Pudemos notar que os alunos conseguiram colocar em prática os passos que caracterizam uma aula investigativa, e que a realização das tarefas era feita com prazer e empolgação, mesmo no início quando ainda era difícil para eles escrever tudo o que pensavam, visto que não era do costume argumentar o porquê das suas respostas.

Vale ressaltar aqui, que parte do sucesso do trabalho se deve ao número reduzido de alunos em classe e aos pré-requisitos apresentados pela turma, o que facilitou o trabalho da professora mediadora.

Assim, o estudo desenvolvido apresenta indicativos de que o desenvolvimento de Investigações Matemáticas como metodologia de ensino representa uma boa estratégia de aprendizagem, tanto para o aluno, quanto para o professor. Para o aluno, porque este passa a ‘pensar matematicamente’ e se constitui o sujeito do conhecimento, pois participa diretamente da (re)construção das ideias matemáticas. Para o professor, porque pode enxergar nas Investigações Matemáticas um modo mais significativo de trabalhar, compreender e ensinar matemática, levando aos seus alunos uma maneira diferente de concebê-la, não apenas levando os conceitos prontos, mudando assim, o jeito em que os seus alunos veem a álgebra.

Em particular, fiquei muito satisfeita com o rendimento destas aulas ‘tão barulhentas’, pois, como professora regente, percebi que mudou o interesse dos meus alunos e fiquei muito contente quando ao final das aulas, eles me questionavam quando teríamos outras atividades daquele jeito. Além da participação geral da turma, o entendimento e a certeza com que eles apresentavam as duas hipóteses também me fascinaram, visto que já estamos habituados a vermos alunos perguntando: ‘é assim mesmo professora?’ ou ‘estou indo certo?’. Com estas atividades, sem dúvidas posso afirmar que houve um amadurecimento em ambas as partes do processo de ensino. Tanto eu quanto eles aprendemos muito com esta experiência.

**MATHEMATICAL RESEARCH AND CONSTRUCTION OF ALGEBRAIC  
THINKING:  
a teaching methodology to understanding of unknowns**

**ABSTRACT<sup>5</sup>**

This article is a consolidation of a survey on the use of mathematical research and teaching methodology for the construction and development of algebraic thinking, and in particular for the understanding of unknowns and equations in a 6th grade from a private

---

<sup>5</sup> Revisão realizada por Kênya Karoline Ribeiro Sodr  (CRLE – Revista **Eventos Pedag gicos**).

school in the city of Jequié-BA. This research sought to understand how the use of Mathematical Research and teaching methodology can contribute to the construction and development of algebraic thinking of unknowns. As methodological approach, we chose the qualitative research case study with dashes of action research. For data collection we used written records produced by 10 students in the class surveyed and tge notes studied by the researcher during the research. This training aims to identify the algebraic concept in the proposed situations, especially those involving patterns and regularities; also to analyze the level of complexity and unpredictability in resolution processes, seeking to identify the occurrence of algebra's formation concepts, and analyze the role of research in building of mathematical knowledge. The present study indicates that the use of Mathematical Investigations such as teaching methodology can contribute to the development of algebraic thinking and to build the concept of unknowns, besides being a good strategy for student learning and teaching for the teacher.

**Keywords:** Mathematics. Mathematics Education. Teaching-Learning of Mathematics. Mathematics Research. Algebraic Thinking.

## REFERÊNCIAS

DIÁLOGO ENTRE OS PARTICIPANTES. **Diálogo entre os participantes**. [28 maio 2009]. Registrado por: Gabriela Nery Pereira. Jequié, BA, 2009. Diálogo desenvolvido durante realização do Trabalho de Conclusão de Curso. (TCC sobre o uso da investigação matemática como metodologia de ensino para a construção e desenvolvimento do pensamento algébrico).

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P. CRISTOVÃO, E. M. **Um Estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Disponível em:

<<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>>. Acesso em: 26 jun. 2009.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**. 2. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2007.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. PONTE J. P. da. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**. Disponível em: <<http://ia.fc.ul.pt/textos/99%20Fons.-Br.-Ponte%20/ProfMat-MPT.pdf>>. Acesso em: 13 jun. 2009.

GIL, K. H.; PORTANOVA, R. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Disponível em: <[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Poster/TRabalhos/P053964543004T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/TRabalhos/P053964543004T.doc)>. Acesso em: 14 jun. 2009.

OLIVEIRA, M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P. da. Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. **Actas do ProfMat** (CD-ROM, p. 207-213. Lisboa: APM, 1996.

PONTE, J. P. da. Investigar, Ensinar e Aprender. **Actas do ProfMat** (CD-ROM, p.25-39). Lisboa: APM, 2003.

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. M. **Investigações Matemáticas na Aula de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo das dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do Ensino Fundamental**. 2007. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TELES, R. A. de M. A Aritmética e Álgebra na Matemática Escolar. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, ano 11, n. 16, p. 8-15, maio 2004.