



REP's - Revista Even. Pedagóg.

Número Regular: Formação de Professores no ensino de Ciências e Matemática

Sinop, v. 8, n. 1 (21. ed.), p. 534-551, jan./jul. 2017

ISSN 2236-3165

<http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/eventos/index>

RESSIGNIFICANDO AS ABORDAGENS DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU: uma raiz negativa, um problema, uma possibilidade

Simone Simionato dos Santos Laier

Universidade Federal de Mato Grosso, Sinop/MT - Brasil

Elisangela Dias Brugnera

Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop/MT - Brasil

RESUMO

Este artigo apresenta uma situação de ensino cujo objetivo foi trabalhar o conteúdo de números complexos, explorado com auxílio da história da matemática e um *software*, em uma disciplina da Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática, no intuito de ressignificar algumas abordagens importantes. Ao tentar criar um movimento que fizesse os estudantes compreenderem que a Matemática é muito mais que apenas manipular notações e operações aritméticas e algébricas, possibilitamos que fossem desenvolvidas relações e comparações de conjuntos de objetos e de formas espaciais do mundo real e feitas classificações e inferências. Conclui-se, fundamentalmente, que a relação entre conteúdos matemáticos, história da matemática e softwares tem muitas potencialidades para o ensino de conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Ensino da Matemática. História da Matemática. Software. Números Complexos.

1 INTRODUÇÃO

Este texto apresenta o relato de atividades de uma disciplina ministrada no Curso de Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT, Campus de Sinop, durante o semestre 2015/02.



A disciplina “Números complexos, polinômios e equações algébricas” é oferecida no terceiro semestre do curso, tendo como ementa: Números complexos: forma algébrica e trigonométrica, operações no conjunto dos números complexos. Com a carga horária de 30 horas, os conteúdos das aulas devem subsidiar os conhecimentos básicos de números complexos¹, operações no conjunto dos números complexos; a fim de que o estudante possa resolver, em seu curso e em sua vida profissional, problemas que dependam destes conteúdos. Ao final do semestre espera-se que o aluno seja capaz de:

- Operar com números complexos, tanto em sua forma algébrica, quanto em sua forma trigonométrica.
- Compreender as operações com números complexos.
- Aplicar as noções para resolver problemas com polinômios e equações.

Pensando em dinamizar as atividades, organizamos a disciplina em quatro etapas, que em conjunto, oferecessem condições para que os objetivos fossem alcançados, sendo:

- 1) Perceber que a impossibilidade de extração de raízes quadradas de números negativos não é definitiva, mas está relacionada com a situação em que só conhecemos os números reais;
- 2) Trabalhar com números que, elevados ao quadrado, possam resultar em números negativos, para poder prosseguir com a resolução da equação.
- 3) Operar (somar, multiplicar, radiciar, etc.) com esses novos números; se possível, inclusive, serão mantidas nestas operações as propriedades operatórias dos números reais (como a comutativa da adição e da multiplicação; como a distributiva da multiplicação em relação à adição, etc.)
- 4) Retomar o problema dado e verificar se, operando com os novos números, é possível resolvê-lo.

Nesse direcionamento, apresentamos para este texto, o relato das atividades trabalhadas com a turma, para explorar a primeira etapa das etapas acima descritas. Ressaltamos que dois aspectos foram fundamentais para a realização das

¹ Entende-se por número complexo ao número na forma $a + bi$, onde $a, b \in \mathcal{R}$ e i é a unidade imaginária.

atividades: o uso da História da Matemática e o uso do *software* Geogebra². Escolhemos este caminho, haja vista que a história dentre os papéis que ela pode ocupar em seu uso pedagógico (MIGUEL 1993), pode servir de fonte de motivação, pois conhecer a história dos processos matemáticos que estão sendo apreendidos, pode provocar no aluno o interesse pelo conteúdo, e a utilização de problemas históricos seria mecanismo para que o mesmo entenda o conteúdo, sendo uma possibilidade de esclarecer e reforçar os conceitos que estão sendo ensinados.

Além disso, a história serve de instrumento de significação de conceitos, pois fornece diferentes formalizações de um mesmo conceito e essas formalizações serviriam como objeto de ensino e aprendizagem, no sentido de mostrar os caminhos traçados para se chegar a um determinado fim ou representação do conteúdo estudado (MIGUEL, 1993; BRITO; SANTOS; TEIXEIRA, 2009).

Outra possibilidade que vislumbramos ao planejar as atividades, foi aliar ao uso da história, uma ferramenta tecnológica, que nos ajudasse a facilitar as representações do que seria feito em sala, sendo que:

[...] recorrer à história dos tópicos matemáticos com a finalidade de reconstituir algumas práticas que podem ser viáveis para que na atualidade, o estudante aprenda matemática conectada às necessidades e exigências da contemporaneidade (contextualização, problematização, interdisciplinaridade, transversalidade) e materializadas com apoio das tecnologias de informação e comunicação (TICs). Essa pode ser uma nova maneira de olhar a matemática na sociedade do século XXI. [...] O importante é que o pesquisador ou professor ressignifique as informações de acordo com o modelo social e educativo existente atualmente de modo que a história da matemática seja adaptada pedagogicamente ao que vai ser abordado nas aulas de matemática. Trata-se na verdade de uma reconstituição epistemológica do modelo didático adotado pelo professor para que o aluno se aproprie das ideias que foram estabelecidas em épocas anteriores a nossa. (MENDES, 2013, p. 72).

Assim, a primeira seção traz as atividades trabalhadas com a turma, mostrando as construções feitas no Geogebra, identificando assim as

²O Geogebra é um software com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos. Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo foi quem idealizou o projeto do software Geogebra e é um de seus principais desenvolvedores em conjunto com Yves Kreis da Universidade de Luxemburgo. Os desenvolvedores do Geogebra permitem que ele seja baixado do site oficial (www.geogebra.org) e instalado em computadores com sistemas operacionais diversos.
Disponível em: <<http://www.ogebra.com.br/arquivos/01-interfaceferramentas.pdf>>

potencialidades do uso de uma ferramenta tecnológica para facilitar a apropriação de alguns conceitos e representações matemáticas.

Na segunda seção do texto, nos ocupamos em relatar brevemente a evolução histórica de como surgiu a ideia de Número Complexo, discutindo a evolução dos conjuntos numéricos frente às operações matemáticas.

Finalmente, apresentaremos algumas considerações, no sentido de refletir sobre como as atividades trabalhadas com o uso da História da Matemática e do *software* foram importantes para o desenvolvimento do conhecimento matemático sobre números complexos.

2 AS ATIVIDADES TRABALHADAS NA DISCIPLINA³

Antes de introduzirmos o conteúdo de números complexos, apresentando as propriedades, suas formas e operações, aplicamos algumas atividades envolvendo equações do segundo grau, cada uma delas com uma característica própria em relação ao número de soluções.

Com o objetivo de problematizar com os estudantes as possibilidades de resolução de equações do segundo grau, introduzimos três exercícios para serem resolvidos e discutidos em sala. A princípio, os estudantes deveriam resolver algebricamente do modo que achassem conveniente, sem nossa intervenção. Eram três exercícios que envolviam equações do primeiro e do segundo grau, demandando conhecimentos sobre resolução de sistema de equações.

Na sequência, seguem os exercícios aplicados, bem como as resoluções e discussões acerca de cada um deles respectivamente. Após os estudantes resolverem sem intervenções, a resolução algébrica foi discutida e apresentada na lousa, ampliando as discussões dos resultados encontrados para a representação gráfica com o auxílio do Geogebra que possibilita a construção geométrica das equações. Para a aplicação dos exercícios e discussão dos resultados foram utilizadas quatro aulas, divididas em dois dias⁴.

³ Como explicado na introdução, as atividades aqui relatadas serviram para trabalhar com a primeira das quatro etapas propostas para a carga horária total; denominadas atividades introdutórias.

⁴ A disciplina era dividida em duas aulas semanais, geminadas, que ocorriam no período noturno, às terças-feiras.

Exercício 1 - Quais são os pontos de interseção da reta $y + 2x + 2 = 0$ com a parábola $y = x^2 - 5x$?

Exercício 2 - Quais são os pontos de interseção da reta $3x - y - 16 = 0$ com a parábola $y = x^2 - 5x$?

Exercício 3 - Quais são os pontos de interseção da reta $x - y - 10 = 0$ com a parábola $y = x^2 - 5x$?

Os pontos de interseção devem satisfazer às duas equações; logo, para obtê-las bastava resolver os sistemas de cada uma das situações:

Resolução Algébrica – **Exercício 1**

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 5x \end{cases}$$

Substituindo $y = x^2 - 5x$ na primeira equação, tem-se:

$$2x + y + 2 = 0 \Rightarrow 2x + (x^2 - 5x) + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

Posto que do sistema das equações da reta e da parábola resultou uma nova equação do segundo grau, optamos por resolvê-la utilizando a fórmula de Báskara,

que era conhecida pelos alunos $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Então, para $x^2 - 3x + 2 = 0$, temos que $a = 1; b = -3$ e $c = 2$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Encontradas as soluções da equação do sistema, ainda precisávamos mostrar que em qualquer uma das equações (da reta e da parábola), as soluções eram verdadeiras.

$2x + y + 2 = 0$		$y = x^2 - 5x$	
Para $x_1 = 1$	Para $x_2 = 2$	Para $x_1 = 1$	Para $x_2 = 2$
$2 \cdot (1) + y + 2 = 0$	$2 \cdot (2) + y + 2 = 0$	$y = (1)^2 - 5 \cdot (1)$	$y = (2)^2 - 5 \cdot (2)$
$y + 4 = 0$	$y + 6 = 0$	$y = 1 - 5$	$y = 4 - 10$
$y_1 = -4$	$y_2 = -6$	$y_1 = -4$	$y_2 = -6$

Assim sendo, em qualquer uma das equações, vê-se que para

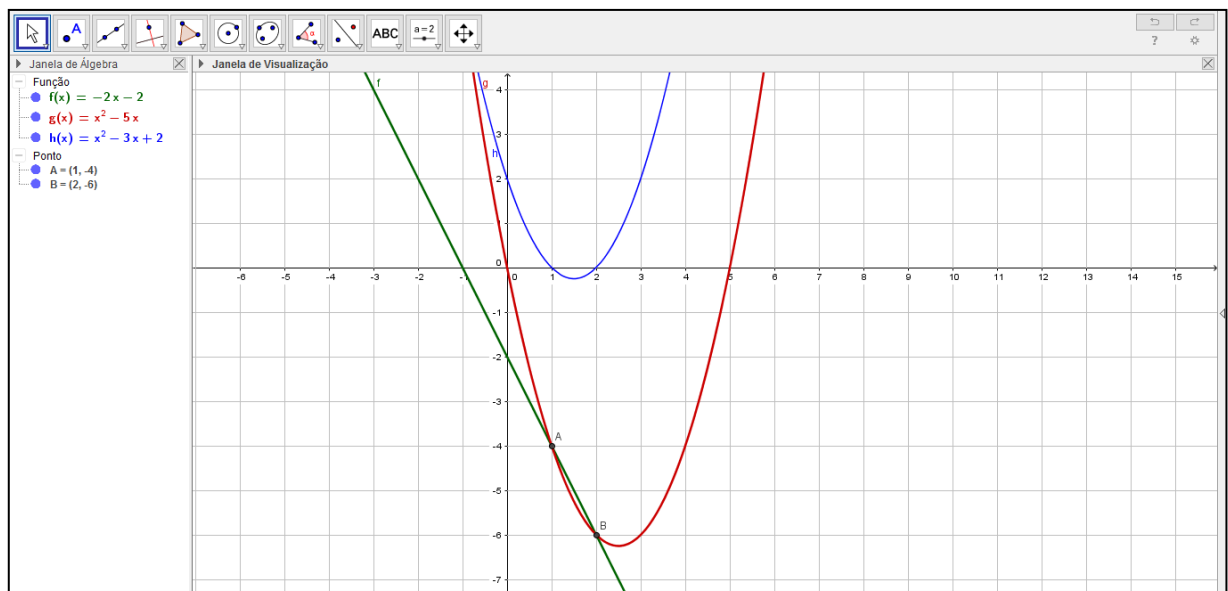
$x_1 = 1$ decorre $y_1 = -4$; e de $x_2 = 2$ decorre $y_2 = -6$.

Portanto, os pontos de interseção são $P_1(1; -4)$ e $P_2(2; -6)$.

Até aqui os estudantes conseguiram resolver e compreender que existiam dois pontos de interseção entre a reta e a parábola. Mas o que de fato isso significava? Após a resolução algébrica e a apresentação dos passos acima, levantamos esse questionamento. A ideia era discutir o que implicava ter encontrado estes dois resultados para os valores de x e y .

Neste momento, os estudantes foram levados a pensar o que isso significava geometricamente, para conduzir o restante da solução, recorremos ao Geogebra, por meio do qual construímos os gráficos das respectivas equações, e para esse primeiro exercício, temos a Figura 1, que mostra geometricamente, o que os estudantes resolveram algebricamente:

Figura 1: Resolução geométrica do primeiro exercício.



Fonte: Construção feita em sala, durante as atividades.

É possível permitir que os estudantes elaborem, a partir dos gráficos construídos no Geogebra, as representações geométricas:

- Da reta (identificada pela cor verde na janela de visualização)

Definida por $f(x) = -2x - 2$ na janela da álgebra;

- Da parábola (identificada pela cor vermelha na janela de visualização)

Definida por $g(x) = x^2 - 5x$ na janela da álgebra;

- Da parábola resultante do sistema (identificada pela cor azul na janela de visualização)

Definida por $h(x) = x^2 - 3x + 2$ na janela da álgebra;

Também é possível, a partir da construção, identificar os pontos A e B (na janela de visualização), indicados na janela da álgebra como $A = (1; -4)$ e $B = (2; -6)$, que são os dois pontos de interseção $P_1(1; -4)$ e $P_2(2; -6)$ encontrados na resolução algébrica. A parábola resultante do sistema (azul), que levou à solução, intercepta o eixo x em dois pontos.

Concluindo, ao resolvermos o sistema algebricamente, encontramos dois pontos de interseção. Ao representarmos isso geometricamente no Geogebra, os dois pontos de interseção também são identificados. Assim, a interpretação que podemos dar à essa situação é que, encontrando algebricamente duas respostas, ou seja, dois pontos de interseção, isso significa que a reta e a parábola se interceptam em dois pontos. A parábola resultante do sistema (azul) intercepta o eixo x em dois pontos, indicando a existência duas soluções reais como raízes para a equação do segundo grau gerada.

Resolução Algébrica – Exercício 2

$$\begin{cases} 3x - y - 16 = 0 \\ y = x^2 - 5x \end{cases}$$

Substituindo $y = x^2 - 5x$ na primeira equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 3x - y - 16 = 0 &\Rightarrow 3x - (x^2 - 5x) - 16 = 0 \Rightarrow [-x^2 + 8x - 16 = 0].(-1) \\ &\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \end{aligned}$$

Posto que, do sistema das equações da reta e da parábola resultou uma nova equação do segundo grau⁵, optamos também por resolvê-la utilizando a fórmula de Báskara.

⁵ Optamos por fazer uma transformação com a multiplicação da equação por (-1), para que o valor de a fosse positivo. Isso não altera o resultado do sistema. A única mudança é que graficamente a parábola tem a concavidade para cima, pois $a > 0$.

Então, para $x^2 - 8x + 16 = 0$, temos que $a = 1; b = -8$ e $c = 16$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (16)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4$$

Encontrada a solução da equação do sistema, precisávamos evidenciar que em qualquer uma das equações (da reta e da parábola), a solução era verdadeira.

$3x - y - 16 = 0$	$y = x^2 - 5x$
Para $x = 4$	Para $x = 4$
$3 \cdot (4) - y - 16 = 0$	$y = (4)^2 - 5 \cdot (4)$
$12 - y - 16 = 0$	$y = 16 - 20$
$-y - 4 = 0$	$y = -4$
$y = -4$	

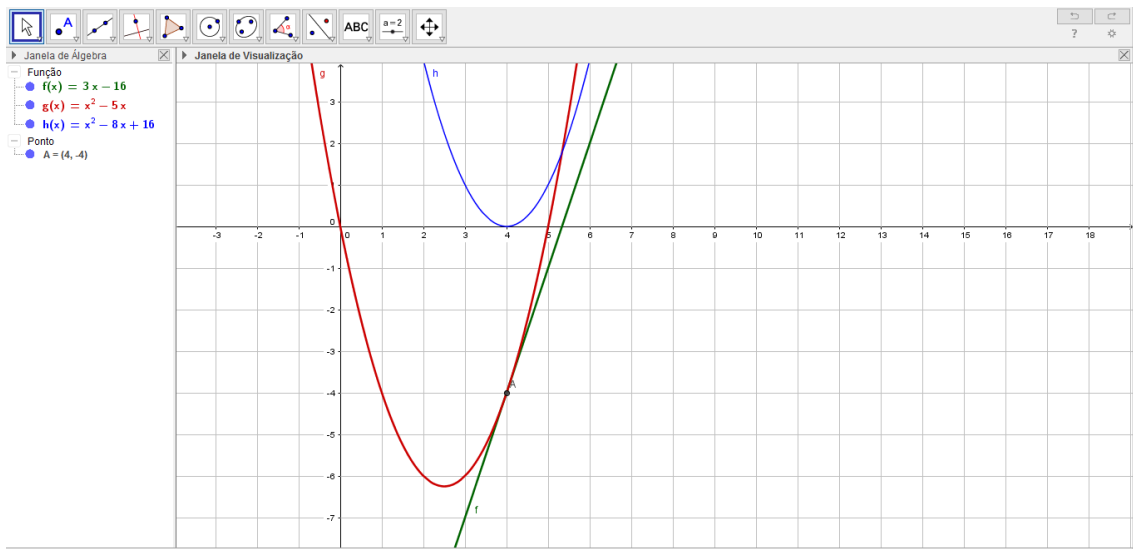
Assim sendo, em qualquer uma das equações, vê-se que para $x = 4$ decorre $y = -4$.

Portanto, o ponto de interseção é $P(4; -4)$.

Ao resolvermos e compreendermos que para a reta e a parábola dadas existia um único ponto de interseção; questionamos seu significado. A ideia era discutir o que implicava ter encontrado somente um resultado x e y .

Com o Geogebra, construímos os gráficos das respectivas equações, e para esse segundo exercício, temos a Figura 2, que mostra geometricamente, o que foi resolvido algebricamente:

Figura 2: Resolução geométrica do segundo exercício.



Fonte: Construção feita em sala, durante as atividades.

É possível evidenciar para essa situação, a partir dos gráficos construídos no Geogebra, as seguintes representações geométricas:

- Da reta (identificada pela cor verde na janela de visualização)

Definida por $f(x) = 3x - 16$ na janela da álgebra;

- Da parábola (identificada pela cor vermelha na janela de visualização)

Definida por $g(x) = x^2 - 5x$ na janela da álgebra;

- Da parábola resultante do sistema (identificada pela cor azul na janela de visualização)

Definida por $h(x) = x^2 - 8x + 16$ na janela da álgebra;

Além disso, a partir da construção, pode-se identificar o ponto A (na janela de visualização), indicados na janela da álgebra como $A = (4; -4)$, que é o ponto de interseção $P(4; -4)$ encontrado na resolução algébrica.

Ao resolvermos o sistema algebricamente, encontramos um ponto de interseção. Ao representarmos isso geometricamente no Geogebra, esse ponto de interseção também é identificado. Assim, a interpretação que podemos dar a essa situação é que, encontrando algebricamente uma única resposta, ou seja, um ponto de interseção, significa que a reta e a parábola se interceptam em um único ponto. A parábola resultante do sistema (azul) intercepta o eixo x em um ponto somente, indicando a existência uma solução real como raiz para a equação do segundo grau gerada.

Resolução Algébrica – Exercício 3

$$\begin{cases} x - y - 10 = 0 \\ y = x^2 - 5x \end{cases}$$

Substituindo $y = x^2 - 5x$ na primeira equação, tem-se:

$$x - y - 10 = 0 \Rightarrow x - (x^2 - 5x) - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$$

Posto que, do sistema das equações da reta e da parábola resultou uma nova equação do segundo grau, optamos também por resolvê-la utilizando a fórmula de Báskara.

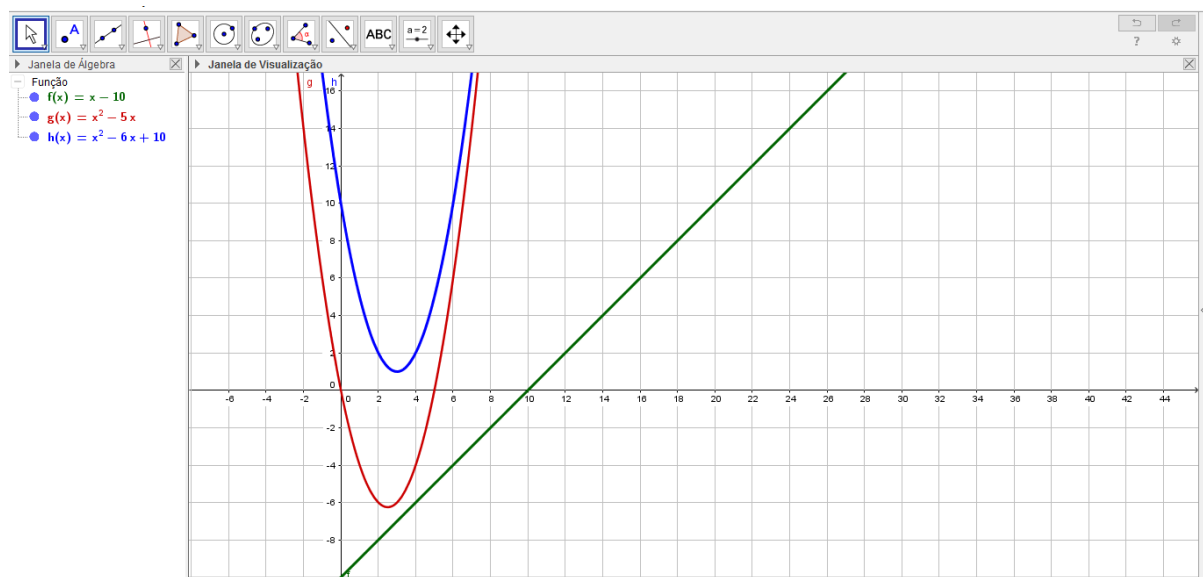
Então, para $x^2 - 6x + 10 = 0$, temos que $a = 1; b = -6$ e $c = 10$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (10)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} !!!$$

Com $\sqrt{-4}$, a equação não admite solução no conjunto dos números \mathcal{R} , o que indica que para o sistema não haveria ponto de interseção.

Este terceiro exercício culmina na discussão da insuficiência dos números reais para solucionar certas equações⁶. Nessa etapa, o objetivo não era ainda apresentar o que poderia ser feito para continuar a solução, e assim, com o Geogebra, construímos os gráficos das respectivas equações, e na Figura 3, temos geometricamente, o que foi resolvido algebricamente para o terceiro exercício:

Figura 3: Resolução geométrica do terceiro exercício.



Fonte: Construção feita em sala, durante as atividades

⁶ Na sequência apresentamos o que foi trabalhado com os alunos sobre os conjuntos numéricos e as operações que os satisfazem.

Para essa situação, a partir dos gráficos construídos no Geogebra, as seguintes representações geométricas podem ser corroboradas:

- *Da reta (identificada pela cor verde na janela de visualização)*

Definida por $f(x) = x - 10$ na janela da álgebra;

- *Da parábola (identificada pela cor vermelha na janela de visualização)*

Definida por $g(x) = x^2 - 5x$ na janela da álgebra;

- *Da parábola resultante do sistema (identificada pela cor azul na janela de visualização)*

Definida por $h(x) = x^2 - 6x + 10$ na janela da álgebra;

Outra possibilidade, a partir da construção, foi identificar que entre a parábola resultante do sistema e a reta, não há ponto de interseção, e que essa parábola não intercepta o eixo x em nenhum ponto.

Ao resolvermos o sistema algebricamente, não fechamos a solução, pela insuficiência de elementos do conjunto dos números reais. Ao representarmos isso geometricamente no Geogebra, esse ponto de interseção também não existe. Assim, algebricamente não há solução, mas geometricamente os gráficos são construídos e é possível interpretar a situação.

2.1 CONSIDERAÇÃO DAS ATIVIDADES

Feitas as atividades, a partir do terceiro exercício atingimos a situação necessária para cumprir a primeira etapa da disciplina, ou seja, fazer com que os estudantes percebessem a impossibilidade de extração de raízes quadradas de números negativos, quando trabalhamos com conjunto dos números reais.

Feito isso, na terceira aula apresentamos um resumo histórico, que destaca alguns períodos da História da Matemática em que os números complexos aparecem. Este é o conteúdo apresentado na próxima seção deste texto.

3 UMA BREVE DESCRIÇÃO DE UMA LONGA HISTÓRIA...

Olhando para momentos importantes da História da Matemática, temos cronologicamente, uma história que se confunde com a das civilizações, pois ela é

dinâmica, foi desenvolvida por culturas diferentes, a partir de aspectos sociais e políticos de cada período (D'AMBROSIO, 2011).

O objetivo nesse momento não era apresentar um estudo detalhado da História da Matemática, mas levantar alguns indícios de como e quando surgiram as discussões que levaram ao desenvolvimento do Conjunto dos Números Complexos.

A começar em meados do ano 250 (d. C.), “fugindo da tradição Grega, que era centrada na geometria, Diofante (século III) iniciou um estudo rigoroso de diversos problemas numa nova área da Matemática, precursora do que viria a ser a Álgebra” (D'AMBROSIO, 2011, p. 141).

Dando um salto, agora para os séculos VIII e IX, os indianos e árabes foram protagonistas no desenvolvimento do sistema de numeração utilizado hoje⁷, e de métodos para a resolução de equações do segundo grau, lançando as bases da álgebra.

Fundada a álgebra nos séculos subsequentes ao manipular algebricamente equações para resolver e encontrar suas raízes; aparecem como solução expressões do tipo $\sqrt{-1}$ que para os conhecimentos desenvolvidos até então, não se tinha a possibilidade de seguir com os cálculos, e as equações ficavam sem resposta⁸.

No século XVI, com os matemáticos Niccolò Tartaglia (1499-1557) e Geronimo Cardano (1501-1576), é desenvolvido um método para resolver as equações algébricas de terceiro grau. Com o desenvolvimento dessas demonstrações surge um problema: soluções para as equações resultando em números negativos⁹.

Então, no século XVII, temos a criação dos “chamados números imaginários, que apareceram quase como um complemento dos números negativos. Num problema de resolução de equações, John Wallis (1616-1703) introduziu ‘um número’ chamado i , que é a raiz quadrada de -1 .” (D'AMBROSIO, 2011, p. 16).

Para fechar o ciclo, chegamos no século XVIII com Leonard Euler (1707-1783), que estudou as equações algébricas e percebeu que para essas equações,

⁷ São os dez dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, criados com base no sistema numérico hindu-arábico, o sistema mais comum para a representação simbólica de números no mundo atual.

⁸ Podemos citar o exemplo da equação $x^2 + 1 = 0$.

⁹ Certas soluções de equações algébricas podem ter como resultado um número negativo, o que, na época, parecia absurdo, algo ser menor do que nada, ou seja, menor do que zero (D'AMBROSIO, 2011, p. 115).

existiam todos os tipos de solução: “números inteiros, imaginários, irracionais, frações etc.” (D’AMBROSIO, 2011, p. 17); e com Carl Friedrich Gauss (1777-1855), é introduzida a expressão “número complexo”, a partir de seu estudo sobre a representação de tais números.

Assim, resumidamente, podemos observar que o conceito de número complexo se desenvolveu gradativamente, como ocorreu com os demais tipos de números. Para algumas equações do segundo grau, como $x^2 + 1 = 0$, não havia solução até o século XVI, pois para os matemáticos da época a raiz negativa não existia. Porém, não foi este o motivo pelo qual os números complexos surgiram. Ao passar dos anos, alguns matemáticos viram o mesmo problema para equações do terceiro grau, onde se percebeu que os números reais não eram suficientes para resolver este tipo de equação¹⁰.

Para finalizar, apresentamos no quadro 1 uma linha do tempo que mostra os principais fatos que levaram ao desenvolvimento dos números complexos:

Quadro 1: principais fatos do desenvolvimento dos números complexos.

Tartaglia (1499-1557)	Cardano (1501-1576)	Bombelli (1526-1573)	Euler (1707-1783)	Gauss (1777-1855)
Descobriu uma fórmula geral para resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, com p, q sendo números Reais. Mas, acabou não publicando sua obra.	Quebrou um juramento feito a Tartaglia, apresentando a fórmula de Tartaglia na sua obra <i>Ars Magna</i> . Surge o impasse da raiz quadrada de um número negativo.	Prosseguiu com a solução encontrada por Cardano, considerou a raiz quadrada de -1 ($\sqrt{-1}$) como um número "imaginário" e desenvolveu regras para trabalhar com esse tipo de número.	Usou pela primeira vez o símbolo i para representar ($\sqrt{-1}$).	Fez um estudo da representação geométrica dos números complexos. Em, 1832 Gauss introduziu a expressão número complexo.

Fonte: Origem dos Números Complexos.

Além dessa pequena introdução histórica, discutimos com os alunos o surgimento dos conjuntos numéricos desde os Números Naturais até os Números Complexos, com o objetivo de mostrar que, diante das operações matemáticas,

¹⁰ **Matemática Complexa.** Origem dos Números Complexos. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos>>.

cada conjunto foi desenvolvido para complementar as propriedades operatórias e possibilitar todas as soluções necessárias. O propósito era fazer com que os mesmos identificassem no conjunto dos Números Complexos a possibilidade de resolver matematicamente, tanto operações numéricas quanto algébricas.

Ressaltamos que foi uma discussão superficial, pois dentro da carga horária da disciplina, não seria possível aprofundar os conceitos. Sendo assim, foi trabalhado o seguinte¹¹:

- Os números naturais surgiram da necessidade do homem relacionar objetos a quantidades, para realizar a contagem de objetos. Os elementos que pertencem a esse conjunto são: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$, o zero surgiu posteriormente, com a finalidade de expressar algo nulo no preenchimento posicional. Para o conjunto dos \mathbb{N} , era possível realizar a adição de quaisquer números deste conjunto, que o resultado seria um número natural.
- No comércio, a utilização dos números naturais esbarrava nas situações em que era preciso expressar prejuízos. Os matemáticos da época, no intuito de resolver tal situação, criaram o conjunto dos números inteiros, simbolizado por $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Assim, com esse novo conjunto, as operações de soma e subtração eram possíveis para qualquer elemento. No entanto, pensando nas operações de multiplicação e divisão, o conjunto dos números inteiros não satisfazia a operação de divisão.
- Assim, foi estipulado um novo conjunto numérico: o conjunto dos números racionais. Esse conjunto consiste na união entre o conjunto dos números naturais com os números inteiros mais os numerais que podem ser escritos na forma de fração ou números decimais. É representado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots; -5; \dots; \frac{9}{2}; \dots; -4; \dots; \dots; -2,5; \dots; -1; \dots; 0; \dots; 1,5; \dots; 2; \dots; \frac{5}{2}; \dots \right\}$$

Alguns números decimais não podem ser escritos na forma de fração, por isso não pertencem ao conjunto dos racionais, eles formam o conjunto dos números

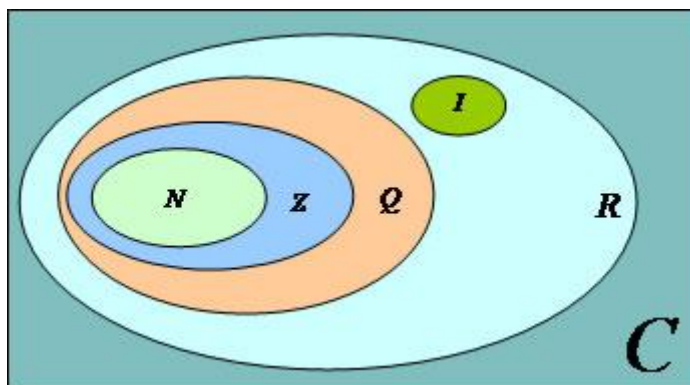
¹¹ Baseado em SILVA, Marcos Noé Pedro Da. "Conjunto dos números complexos"; *Brasil Escola*. Disponível em: < <http://brasilecola.uol.com.br/matematica/conjunto-dos-numeros-complexos.htm> >. Acesso em: 25 maio 2016.

Irracionais – representado por **I**. Este conjunto possui números importantes para a Matemática, como o π (número pi).

- A união dos conjuntos dos números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais formam o conjunto dos números Reais. A criação do conjunto dos números Reais se deu ao longo de todo o processo de evolução da Matemática, suprimindo as necessidades de atender a todas as operações matemáticas. Na busca por novas descobertas, os matemáticos esbarraram em resoluções de equações que geravam raízes quadradas de um número negativo;
- A resolução destas raízes só foi possível com a criação e adequação dos Números Complexos. São representados pela letra **C** e mais conhecidos como o número da letra **i**, sendo designada nesse conjunto a seguinte fundamentação: $i^2 = -1$, para substituir nas equações, a raiz negativa, e assim prosseguir com a solução. A esse **i** deu-se o nome de unidade imaginária, possibilitando a extração da raiz quadrada de um número negativo.

Com essa breve elucidação, mostramos aos estudantes que o conjunto dos Números Complexos constituem o maior conjunto numérico existente, e na representação dos conjuntos por diagrama, temos na Figura 4 uma ilustração:

Figura 4: Representação dos Conjuntos numéricos por diagrama



Fonte: Brasil Escola, Conjunto dos Números Complexos.

Assim, encerramos a primeira etapa planejada para a disciplina, e demos início à segunda etapa, que contemplava a compreensão de que ao criar-se

números que, elevados ao quadrado, pudessem resultar em números negativos, seria possível prosseguir com a resolução da equação.

4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Pudemos considerar, a partir das atividades desenvolvidas com os estudantes do Curso de Ciências Naturais e Matemática: Habilitação em Matemática, que primeiro, com a visualização da representação geométrica das equações algébricas, foi possível verificar cada uma das situações, ampliando a compressão dos resultados obtidos a partir dos cálculos algébricos. Além disso, verificamos, assim como Santos e Basso (2012), que em relação aos objetos estudados, o uso da tecnologia, neste caso, o *software* Geogebra, possibilitou aos alunos modificarem as percepções do problema que lhe é posto.

Além disso, partimos da premissa de que trabalhar com o *software* Geogebra, é trabalhar com objetos de aprendizagem técnico-informacionais (SALLUM; CALAVARI JR; SCHIMIGUEL, 2011) que contribuem para “aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem na educação matemática” (p. 107). Esses objetos assumem atualmente, um papel importante como elemento mediador no ensino da matemática.

No entanto, chamamos a atenção para o fato de que ao trabalhar com qualquer atividade que utilize tais objetos, devemos nos cercar de cuidados no planejamento da atividade, desde sua concepção à sua aplicabilidade, para que, de fato, a ferramenta favoreça o processo de aprendizagem.

Além do aspecto de instrumentalizar a aula de matemática com tecnologias, também nos apropriamos do uso da História da Matemática, como motivadora para mostrar que “[.] a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade[.]” (D’AMBROSIO, 2013, p. 10).

Como ponto de reflexão, ainda com base nas ideias de D’Ambrosio, temos que, a matemática pode ser identificada nos trabalhos artesanais, nas manifestações artísticas e nas práticas comerciais e industriais. Trazer à tona sua história e incorporar isso à nossa ação pedagógica, é uma das principais motivações para a História da Matemática.

Para concluir, ressaltamos que, ao tentar criar um movimento que fizesse os estudantes compreenderem que a Matemática é muito mais do que apenas manipular notações e operações aritméticas, ou lidar com a álgebra etc, possibilitamos que fossem desenvolvidas relações e comparações quantitativas e qualitativas de conjuntos de objetos e de formas espaciais do mundo real, fazer classificações e inferências. A relação entre conteúdos matemáticos, história da matemática e softwares tem muitas potencialidades, sendo essa experiência, um exemplo disso.

GIVING NEW MEANING FOR THE APPROACHES OF SECOND-DEGREE EQUATIONS:

root of a negative number, a problem, a possibility

ABSTRACT

This article reports a teaching situation that aims work with complex numbers, explored by de aid of History of mathematics and a software, in a discipline of a Graduation Course of Natural Sciences and Mathematic, to give new meanings for some important approaches. In making design a movement that makes the students realize the Mathematic is so much more than manipulate notations and arithmetic and algebraic operations, we enable that relations and comparisons was been developed for a set of objects and spatial forms the real world, making classifications and inferences. Report that, fundamentally, the relationship between mathematical contents, history of mathematic and software's there are a lot of potentials for teaching mathematical objects.

Keywords: Teaching of Mathematics. History of Mathematic. Software. Complex Numbers.

REFERÊNCIAS

BRITTO, A. J.; SANTOS, K. E. S. dos; TEIXEIRA, M. R. G. A história nos planos de ensino de futuros professores de matemática. **Horizontes**, v. 7, n. 1, p. 115-120, jan./jun. 2009.

D'AMBROSIO, U. **Uma síntese sociocultural da História da Matemática**. São Paulo: PROEM, 2011.

D'AMBROSIO, U. Porque e como ensinar História da Matemática. **REMATEC**, Natal (RN) Ano 8, n.12, p. 7-21, jan./jun., 2013.

MENDES, I. A. História no ensino da matemática: trajetórias de uma Epistemologia didática. **REMATEC**, Natal (RN) Ano 8, n.12, p. 66-85, jan./jun., 2013.

MIGUEL, A. **Três Estudos Sobre história**. Tese (Doutorado). Unicamp -Campinas, 1993.

SANTOS, R. S.; BASSO, M. V. A. Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de geometria analítica: manipulações no *software* GRAFEQ. In: BÚRIGO, E. Z. **A matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. p. 177-193.

Correspondência:

Simone Simionato dos Santos Laier. Professora Assistente – Universidade Federal de Mato Grosso, Campus de Sinop – ICNHS. Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. (REAMEC), Sinop, Mato Grosso, Brasil. E-mail: simoneesslaierufmt@gmail.com

Elisangela Dias Brugnera. Professora Assistente – Universidade do Estado de Mato Grosso, Câmpus de Sinop. Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (REAMEC), Sinop, Mato Grosso, Brasil. E-mail: ebrugnera@gmail.com

Recebido em: 31 de dezembro de 2016.

Aprovado em: 13 de maio de 2017.